再度問題

1　必須問題（配点（40点）

（１）袋の中に5枚のコインが入っており　そのうち2枚には両面にＡが書かれており　残り３枚には片面にＡ　もう一方の片面にＢが書かれている。

（ｉ）袋から無作為に1枚のコインを選び　選んだコインを投げたときＡが書かれた面が上になる確率を求めよ。

（ii）袋から無作為に1枚のコインを選び　選んだコインを投げたときＡが書かれた面が上になった。このとき　下の面にもＡが書かれている確率を求めよ。

（２）多項式 $(x-1)^{99}$ を $x^2$ で割ったときの余りを求めよ。また　整数 $99^{99}$ を10000で割ったときの余りを求めよ。

（３） $12^{12}$ の桁数を求めよ。ただし $\log_{10}2=0.301$　　$\log_{10}3=0.477$

（４） $z=\dfrac{-\sqrt{3}+i}{1+i}$ とする。

（ｉ） $z$ を極形式で表せ。

（ii） $n$ を正の整数とする。 $z^n$ が実数となるように最小の $n$ を求めよ。

略解

（１）（ｉ）袋の中に5枚のコインが入っている。1枚のコインを選び　そのコインを投げる。表面がAである確率

両面がAのコイン2枚から1枚　片面がAのコイン3枚から１枚を選び　そのコインを投げたとき表面がA

従って　求める確率　$\dfrac{2}{5}+\dfrac{3}{5}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{7}{10}$

（ii）条件付き確率

$\dfrac{分子}{分母}$　分母：$\dfrac{7}{10}$, 分子：両面がA $\dfrac{2}{5}$

求める条件付き確率　$\frac{2}{5}\div\frac{7}{10}=\frac{4}{7}$

（２）$(x-1)^{99}=P(x)\cdot x^2+ax+b$ の解法　ダメ…

$\{x+(-1)\}^{99}$ として　二項定理

$\{x+(-1)\}^{99}={}_{99}C_0x^{99}+{}_{99}C_1x^{98}(-1)+{}_{99}C_{97}x^{97}(-1)^2+\cdots$

$+{}_{99}C_{97}x^2(-1)^{97}+{}_{99}C_{98}x(-1)^{98}+{}_{99}C_{99}(-1)^{99}$

$(x-1)^{99}$を $x^2$ で割ったときの余り ${}_{99}C_{98}x(-1)^{98}+{}_{99}C_{99}(-1)^{99}=99x-1$

次に　整数 $99^{99}$ を10000で割ったときの余り

$99^{99}=(100-1)^{99}$　$10000=100^2$　よって　$x=100$ とおく。

余り　$99\times100-1=9899$

（３）Ⅱ型 $\boxed{1}$　（４）参照

（４）$z=\frac{-\sqrt{3}+i}{1+i}$　分母の実数化　ダメ…

$$-\sqrt{3}+i=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$1+i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$z=\frac{2}{\sqrt{2}}\left\{\cos\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$$

また　ド･モアブルの定理　$z^n=\sqrt{2}^{\,n}\left(\cos\frac{7\pi n}{12}+i\sin\frac{7\pi n}{12}\right)$

$z^n$ が実数であるためには虚部 $\sin\frac{7\pi n}{12}$ が0　最小の正の整数 $n=12$

$\boxed{2}$　必須問題（配点40点）

数列 $\{a_n\}$ の初項 $a_1$ から第 $n$ 項 $a_n$ までの和を $S_n$　数列 $\{b_n\}$ の初項 $b_1$ から第 $n$ 項 $b_n$ までの和を $T_n$ とするとき

$a_1=2$　$b_1=0$　$a_{n+1}=2T_n+2$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$　$b_{n+1}=2S_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

（１）　$a_2$，$b_2$ を求めよ。

（２）　$a_{n+1}$，$b_{n+1}$ を $a_n$, $b_n$ を用いて表せ。

（３）一般項 $a_n$ を求めよ。

解答

（１）　$a_2=2T_1+2=2b_1+2=2\times 0+2=2$

$b_2=2S_1=2a_1=2\times 2=4$

（２）　$a_{n+1}-a_n=2T_n-2T_{n-1}=2(T_n-T_{n-1})=2b_n$ … ア

$b_{n+1}-b_n=2S_n-2S_{n-1}=2(S_n-S_{n-1})=2a_n$ … イ

ア+イ　$a_{n+1}+b_{n+1}-(a_n+b_n)=2(a_n+b_n)$ より

$a_{n+1}+b_{n+1}=3(a_n+b_n)$ … エ

ア−イ　$a_{n+1}-b_{n+1}-(a_n-b_n)=-2(a_n-b_n)$より

$a_{n+1}-b_{n+1}=-(a_n-b_n)$ … オ

エ+オ　$2a_{n+1}=2(a_n+2b_n)$ より　$a_{n+1}=a_n+2b_n$

エ−オ　$2b_{n+1}=2(2a_n+b_n)$ より　$b_{n+1}=2a_n+b_n$

（３）エより　$\{a_n+b_n\}$ は初項 $a_1+b_1=2$ 公比3の等比数列であるから

$a_n+b_n=2\cdot 3^{n-1}$ … カ

オより　$\{a_n-b_n\}$ は初項 $a_1-b_1=2$ 公比（－１）の等比数列であるから

$a_n-b_n=2\cdot(-1)^{n-1}$ … キ

カ+キ　$2a_n=2\cdot 3^{n-1}+2\cdot(-1)^{n-1}$　ゆえに　$a_n=3^{n-1}+(-1)^{n-1}$

$\boxed{3}$　必須問題（配点40点）

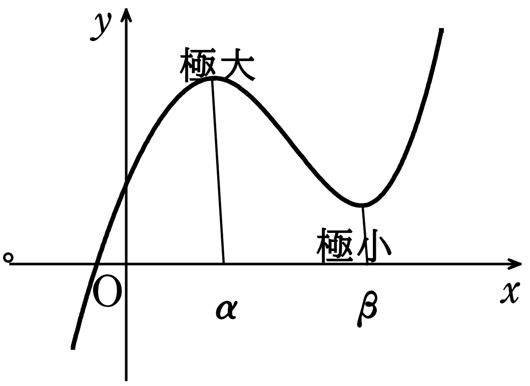
$a$ は実数の定数とし　関数 $f(x)$ を　$f(x)=e^{-x}(a-\sin x-\cos x)$ $(0<x<2\pi)$ により定める。ただし $e$ は自然対数の底である。

（１）　$f(x)$ が極値をもつとき $a$ の値の範囲を求めよ。

（２）　$f(x)$ が極値を2つもつときを考える。　極値の積が負となるとき $a$ の値の範囲を求めよ。また　極値の積が $-\dfrac{1}{2}e^{-3\pi}$ となるときの $a$ の値をすべて求めよ。

極値とは

微分可能な関数 $f(x)$ において　$f'(x)=0$ を満たす $x$ の値を $x=a$ とおく。$x=a$ の前後で $f'(x)$ の符号が変わるとき　$f(a)$ を $x=a$ における $f(x)$ の極値という。特に　$x=\alpha$ の前後で $f'(x)$ の符号が正から負に変わるとき　$x=\alpha$ で $f(x)$ は極大になるといい　$f(\alpha)$ を極大値。$x=\beta$ の前後で $f'(x)$ の符号が負から正に変わるとき $x=\beta$ で $f(x)$ は極小になるといい $f(\beta)$ を極小値という。極大値と極小値を合わせて極値という。



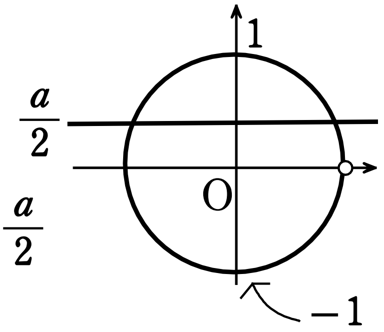

$\boxed{\text{解答}}$

（１）$f(x)=e^{-x}(a-\sin x-\cos x)$

微分 $f'(x)=-e^{-x}(a-\sin x-\cos x)+e^{-x}(-\cos x+\sin x)$

$= e^{-x}(-a+2\sin x)$

$f'(x)=0$ のとき　$e^{-x}\neq 0$ より　$\sin x=\dfrac{a}{2}$




$0<x<2\pi$において $-1\leqq\dfrac{a}{2}\leqq 1$ のとき $\sin x=\dfrac{a}{2}$

を満たす解が存在する。

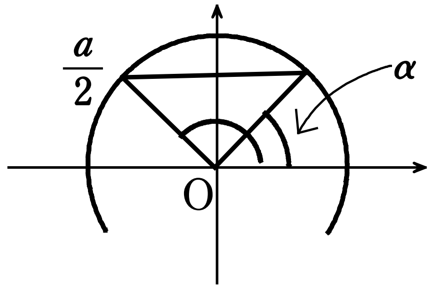
ただし　$a=\pm 2$ のとき　$\sin x=\pm 1$ を満たす $x$ の値 $x=\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}$ の

それぞれの前後で $f'(x)$ の符号が変わらない。従って　$f(x)$ が極値をもつための $a$ の値の範囲 $-2<a<2$である。

（２）$f(x)$ が極値を2つもつときを考える。$f(x)$ が極値をもつための条件 $-2<a<2$において $a=0$ のとき すなわち　$x=\pi$ のときは極値が1個

極値を2個もつとき　$-2<a<0$，$0<a<2$ である。

（ｉ）$0<a<2$ のとき




2つの極値を与える $x$ の値を$\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$

とおくと他方は（$\pi-\alpha$）従って2つの極値の積が負　$f(\alpha)\times f(\pi-\alpha)<0$　ただし　$f'(\alpha)=f'(\pi-\alpha)=0$

ここで　$f'(\alpha)=f'(\pi-\alpha)=0$ より　$\sin\alpha=\dfrac{a}{2}$

$f(\alpha)=e^{-\alpha}(a-\sin\alpha-\cos\alpha)$，$f(\pi-\alpha)=e^{-(\pi-\alpha)}(a-\sin\alpha+\cos\alpha)$

2つの極値の積　$f(\alpha)\times f(\pi-\alpha)<0$，$e^{-\pi}\fallingdotseq 0$，$e^{-(\pi-\alpha)}\fallingdotseq 0$ より

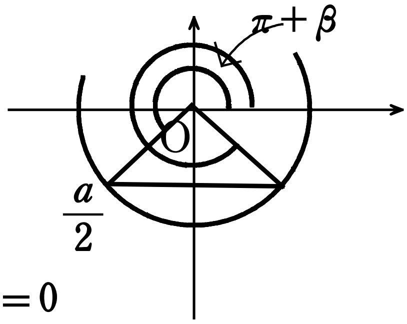
$(a-\sin\alpha\ -\cos\alpha)(a-\sin\alpha\ +\cos\alpha)<0$　展開　整理する

$a^2-2(\sin\alpha)a+(\sin^2\alpha\ -\cos^2\alpha)<0$　$\sin\alpha=\dfrac{a}{2}$ を代入　整理する

$\dfrac{a^2}{2}-1<0$，$0<\dfrac{a}{2}<1$ より　$0<a<\sqrt{2}$

（ii）$-2<a<0$ のとき　2つの極値を与える

$x$ の値を$\pi+\beta\left(0<\beta<\dfrac{\pi}{2}\right)$とおくと他方は




（$2\pi$ー$\beta$）従って　2つの極値 の積が負

$f(\pi+\beta)\times f(2\pi-\beta)<0$，$f'(\pi+\beta)=f'(2\pi-\beta)=0$

$\sin\beta=-\dfrac{a}{2}$　展開　整理　計算　$\dfrac{a^2}{2}-1<0$　そして $-2<a<0$より

$-\sqrt{2}<a<0$

以上より　2個の極値の積が負であるときの $a$ の範囲

$-\sqrt{2}<a<0$，$0<a<\sqrt{2}$

次に　2個の極値の積が $-\dfrac{1}{2}e^{-3\pi}$ となる $a$ の値

上の結果から　$e^{-\alpha}\cdot e^{-(\pi-\alpha)}\left(\dfrac{a^2}{2}-1\right)=-\dfrac{1}{2}e^{-3\pi}$のとき $\dfrac{a^2}{2}-1=-\dfrac{1}{2}e^{-2\pi}$

$0<a<\sqrt{2}$ より　$a=\sqrt{2-e^{-2\pi}}$

また　$e^{-(\pi+\beta)}\cdot e^{-(2\pi-\beta)}\left(\dfrac{a^2}{2}-1\right)=-\dfrac{1}{2}e^{-3\pi}$ のとき　$\dfrac{a^2}{2}-1=-\dfrac{1}{2}$

$-\sqrt{2}<a<0$ より　$a=-1$

2個の極値の積が $-\dfrac{1}{2}e^{-3\pi}$ となる $a$ の値　$a=\sqrt{2-e^{-2\pi}}$，$-1$