$\boxed{4}$ 必須問題（配点40点）

$\mathrm{AB}=1$，$\mathrm{AC}=3$，$\mathrm{BC}=2\sqrt{3}$ である三角形ABCがある。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とする。

（１）内積 $\vec{b}\cdot\vec{c}$ の値を求めよ。

（２）s, t を実数とし　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\vec{b}+t\vec{c}$ とする。$\mathrm{AB}\perp\mathrm{BP}$, $\mathrm{AC}\perp\mathrm{CP}$であるとき s，t の値を求めよ。さらに　$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|$ を求めよ。

（３）点Qが三角形ABCの外接円上を動くとき　三角形BCQの面積を最大にするQを Q_0 とする。$\overrightarrow{\mathrm{AQ_0}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

$\boxed{\text{解答}}$

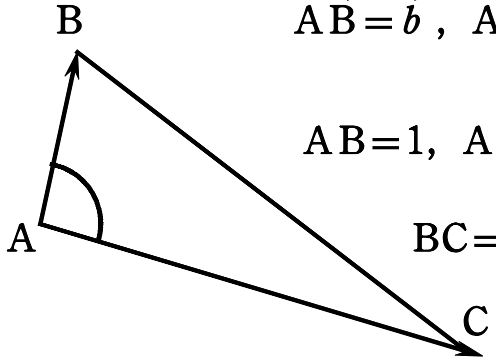
（１）余弦定理

$$\cos A=\frac{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2}{2|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}$$

$$=\frac{1+9-12}{2\times1\times3}=-\frac{1}{3}$$

内積　$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos A$

$$=1\times3\times\left(-\frac{1}{3}\right)=-1$$



$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$

$\mathrm{AB}=1$，$\mathrm{AC}=3$

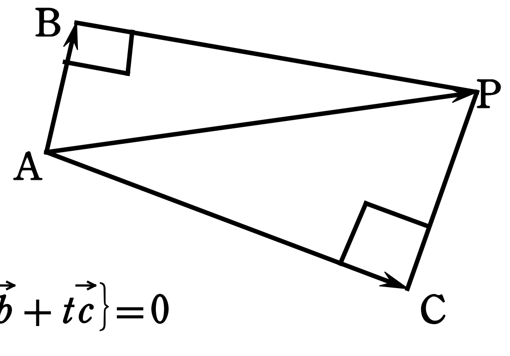
$\mathrm{BC}=2\sqrt{3}$

（２）$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$=s\vec{b}+t\vec{c}-\vec{b}$

$=(s-1)\vec{b}+t\vec{c}$

$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=s\vec{b}+(t-1)\vec{c}$



$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ より　内積 $\vec{b}\cdot\{(s-1)\vec{b}+t\vec{c}\}=0$

従って $(s-1)|\vec{b}|^2+t\vec{b}\cdot\vec{c}=0$ よって $s-t=1$　また　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ より

内積計算して $s-9t=-9$　解くと $s=\frac{9}{4}$，$t=\frac{5}{4}$　また $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{1}{4}(9\vec{b}+5\vec{c})$

より $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2=\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{1}{16}\{81\times1-90+25\times3\}=\frac{27}{2}$，$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=\frac{3\sqrt{6}}{2}$

（３）三角形ABCの外接円は（２）の結果より

APを直径　中心はAPの中点O

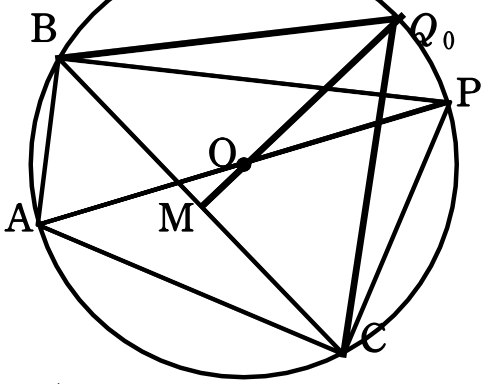
従って　Qはこの円周上にあって

三角形BCQの面積が最大となる点 Q_0 は

底辺BCからの距離が最大.∠BACが鈍角

よりBCに関してAの反対側　BCの中点

Mとおく。右図



$\overrightarrow{AQ_0}$ を $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表したい。 $\overrightarrow{AQ_0}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MQ_0}$

$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})$　ここで　$\overrightarrow{MQ_0}=p\vec{b}+q\vec{c}$ とおく。

$\overrightarrow{MQ_0}\perp\overrightarrow{BC}$ より　$(p\vec{b}+q\vec{c})\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0$　内積計算すると　$p-5q=0$

次に　MQ_0 の大きさに着目。 $OM^2=OB^2-BM^2=\left(\frac{3\sqrt{6}}{4}\right)^2-(\sqrt{3})^2=\frac{3}{8}$

$MQ_0=\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{3\sqrt{6}}{4}=\sqrt{6}$　$|p\vec{b}+q\vec{c}|=\sqrt{6}$　内積計算すると

$p^2-2pq+9q^2=6$　従って　p, q に関する連立方程式

$p-5q=0$, $p^2-2pq+9q^2=6$ を解く。 題意から $q=\frac{1}{2}$　$p=\frac{5}{2}$

ゆえに　$\overrightarrow{AQ_0}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MQ_0}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})+\frac{1}{2}(5\vec{b}+\vec{c})$

$=3\vec{b}+\vec{c}$

5　指定選択問題（配点40点）

正の整数Nを3で割ったときの余りは2である。

（１）正の整数 a, b を3で割ったときの余りを r_a, r_b とする。 $ab=N$ が成り立つとき　r_a, r_b の組 (r_a, r_b) をすべて求めよ。

（２）Nの正の約数の総和を3で割ったときの余りを求めよ。

（３）Nの正の約数の逆数の総和を $\frac{q}{p}$ (ただし p, q は互いに素の正の整数)と表したとき q は3の倍数であることを示せ。

例えば　N＝14のとき　Nの正の約数は1, 2, 7, 14であり　正の約数の逆数の総和 $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}=\frac{12}{7}$ となり 12 は3の倍数である。

整数問題

新課程　数学A　第3章　数学と人間の活動　久しぶりの整数問題。あえてこの問題を選択問題に指定しました。「3を法とする剰余系」この数学用語は死語になったとのこと。余り問題という。ここでの　余りとして　取り扱う整数は　0, 1, 2　の３種類。よって　基本的には　具体例で題意を確認して　すべての場合について拾い上げ　…　やってみよう。

$\boxed{\text{解答}}$

正の整数Nを約分したとき　その約分は正の整数と負の整数に分かれる。ここでは　正の整数の方を単に約分と呼ぶことにする。

（１）$r_a=0,\ 1,\ 2,\ r_b=0,\ 1,\ 2$　積 $r_a\times r_b=0,\ 1,\ 2,\ 4$　この積の整数のうち3で割って余りが2となる $r_a,\ r_b$ の組 $(r_a,\ r_b)$をすべて拾い上げる。

$(r_a,\ r_b)=(1,\ 2),\ (2,\ 1)$。

（２）具体例　N=2=3×1−1　Nの約数の総和＝1+2=3　N=5=3×１+2　Nの約数の総和＝1+5=6　N=8=3×3−1　Nの約数の総和＝1+2+4+8＝15　N=14=3×5−1　Nの約数の総和＝1+2+7+14=24

これらの具体例から Nの約数の総和を3で割ったときの余りは0であると推測される。

$$N=3n-1\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\text{とおく}$$

N の約数をどのように表すか？　悩む…　困ったときは　…

数学的帰納法

Nの約数の総和を3で割ったときの余りが0である。数学的帰納法で証明

$n=1$ のとき　N=2　2の約数の総和 1+2=3　3を3で割ったときの余りは0　$n=1$ のとき成り立つ。

$n=k$ のとき　N= $3k-1$　Nの約数の総和を3で割ったときの余りが0と仮定

$n=k+1$ のとき　N= $3(k+1)-1=(3k-1)+3$　Nの約数の総和は

$(3k-1)$の約数の総和を3で割ったときの余り0 と仮定していた。
そして 3 の約数の総和 1+3=4 4は3で割ったときの余り1
0 ではない？　悩む…　そうだ！　$(3k-1)$の約数1，3の約数1 1 は
重複しているね！　また　$(3k-1)$の約数には3は存在しない。
N= $3(k+1)-1$ =($3k-1$) +3におけるNの約数の総和を3で割った
ときの余りは0である。従って　$n=k+1$ のとき成り立つ
以上より　数学的帰納法によって　Nの約数の総和を3で割ったときの余りが0であることが証明された。（終）

（３）具体例

N=2　N=2の約数の逆数の総和　$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$　分子を3で割ったときの余り0

N=5　N=5の約数の逆数の総和　$\frac{1}{1}+\frac{1}{5}=\frac{6}{5}$　分子を3で割ったときの余り0

N=8　N=8の約数の逆数の総和　$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{15}{8}$　分子を3で割ったときの余り0

例えば　N=14のときも 示されている。確認終了。

数学的帰納法で証明してみよう

$n=k$ のとき　N= $3k-1$　Nの約数の逆数の総和が $\frac{q}{p}$ のとき q を3で割ったときの余りが0と仮定

$n=k+1$ のとき　N= $3(k+1)-1$ = $3k+2$　Nの約数の逆数の総和を既約分数の形に表したとき　分子を3で割ったときの余り0

どのように導く？　悩む…　数学的帰納法は断念かな…　断念！

具体例を参考にして考えてみよう

N=8　N=8の約数の逆数の総和　$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{8+4+2+1}{8}$

発見！

（２）の結果。分子に着目

N＝8のときNの約数の総和　1＋2＋4＋8　Nの約数の逆数の総和の分子はNの約数の総和ですね。Nの約数の総和を 3で割ったときの余り は0であった。しかも　Nの約数の総和の分母は3で割り切れない。このことは一般に成り立つ。

従って　Nの約数の逆数の総和を既約分数で表したとき　分子は 3の倍数であることが示された。（終）