2024年度　第2回　全統記述模試問題　数学　⑥　誤り題

次のア～オのうち誤りがあれば　その記号を選び　なければなしと示しなさい。

$\boxed{1}$　ア　x は実数とする。命題「$x<3$ ならば $x^2<9$」は真である

イ　x，y は整数とする。

等式 $(x-2)(y-3)=5$ を満たす x，y の組 $(x,\ y)=(3,\ 8), (7,\ 4)$ である

ウ　$(x-1)^9$ を x^2 で割ったときの余りを $ax+b$ とおく

$a={}_9C_8(-1)^8=9$, $b={}_9C_9\ (-1)^9=-1$

エ　2^9を9で割ったときの余り　ウにおいて $x=3$ とおく。 $9\times3-1=26$

2^9を9で割ったときの余りは26

オ　i を虚数単位とする。 $z=-\sqrt{3}\ +i$ とおく。

$$-\sqrt{3}+i=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\ +\frac{1}{2}i\right)=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}\ +i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

z^n が実数となるときの正の整数 n のうち　最小の正の整数 $n=6$

$\boxed{2}$　机の上に $\boxed{2}$, $\boxed{4}$, $\boxed{6}$ のカードが置かれている。1個のサイコロを投げて出た目の数と同じカードの数が書かれたカードが机の上にあればそのカードを取り除く試行を　$\boxed{2}$ $\boxed{4}$ $\boxed{6}$ が すべて取り除かれるまで繰り返す。$\boxed{2}$ $\boxed{4}$ $\boxed{6}$ がすべて取り除かれるまでに行った試行回数をXとする。1個のサイコロを投げて出た目の数を (　　) を用いて (1回目の目, 2回目の目, …) と表し○はいずれかのサイコロの目とする。

ア　$(4,\ 3,\ 6,\ 4)$ のときX＝4

イ　X＝1，2となる確率はいずれも 0 である

ウ　X＝3 となる確率 $\dfrac{{}_6C_3\times 3!}{6^3}$ である

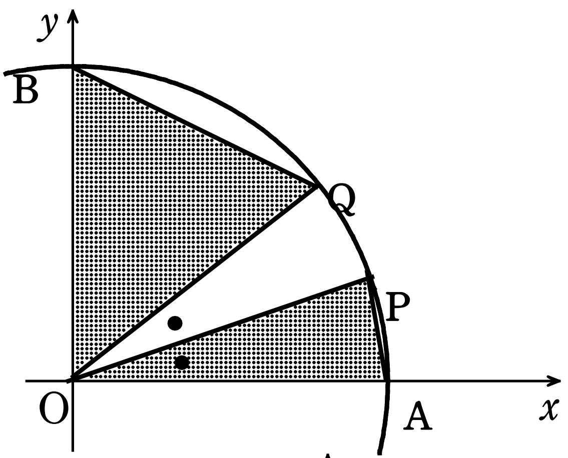
エ　(奇数, ○ , ○, 6)のときX＝4 となる確率 $\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\times\dfrac{1}{6}$ である

オ　(奇数, ○, ○, ○）のときX＝4 となる確率 $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3!}{6^3}$ である

$\boxed{3}$　Oを原点とする座標平面上に円C: $x^2+y^2=1$ と2点A(1, 0), B(0, 1)がある。
C上に2点P, Qを∠AOP＝∠POQ＝θ ($0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ ）となるようにとる。
Pの y 座標は正でありQはAと異なるものとする。三角形OAPの面積をS
三角形OBQの面積をTとする。このとき　S＋T＝ $f(\theta)$ とおく。

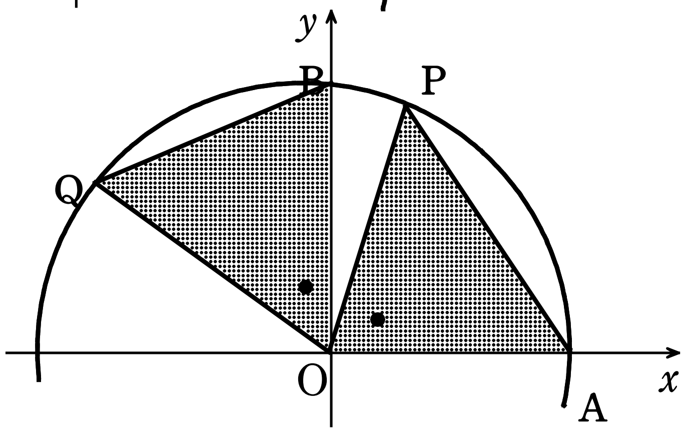
ア　$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ のとき

$$f(\theta)=\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)$$
$$=\frac{1}{2}(\sin\theta+\cos 2\theta)$$
$$=-\sin^2\theta+\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}$$



イ　$\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$f(\theta)=\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\cos 2\theta$$
$$=\sin^2\theta+\frac{1}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}$$



$\sin\theta = t$，$y = g(t)$ とおく。

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ のとき

$0 < t < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ のとき

$g(t) = -t^2 + \dfrac{1}{2}t + \dfrac{1}{2}$

$= -\left(t - \dfrac{1}{4}\right)^2 + \dfrac{9}{16}$

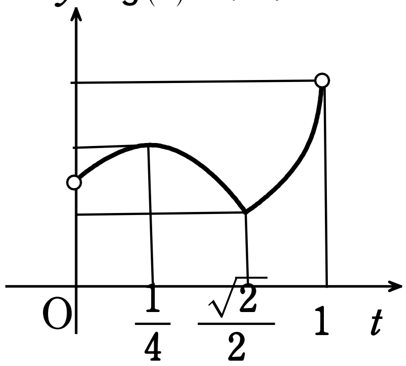
$\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ のとき

$\dfrac{\sqrt{2}}{2} \leqq t < 1$ のとき

$g(t) = t^2 + \dfrac{1}{2}t - \dfrac{1}{2}$

$= \left(t + \dfrac{1}{4}\right)^2 - \dfrac{9}{16}$

$y = g(t)$のグラフ



ウ　$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする。$\sin\theta = t$，$f(\theta) = y$ について考える。

$\sin\theta = t$ について　θが 変化するとき t もまた変化して　θ は t と1対1に変化する。

$f(\theta) = y$について　θが変化するとき yはθと多対1に変化する。

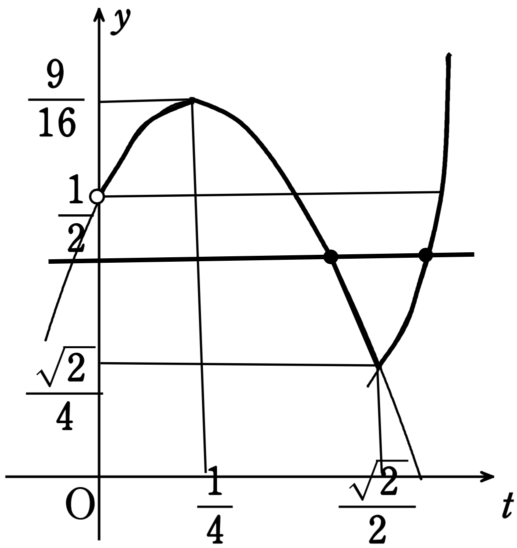
すなわち　θがちょうど 3個, 2個, 1個のとき 1つの y が決まる。

エ　θがちょうど 2個存在とする。

$\begin{cases} y = g(t) \\ y = k \end{cases}$　2つのグラフの共有点が2個

右図参照

k が満たす条件 $\dfrac{\sqrt{2}}{4} < k \leqq \dfrac{1}{2}$



オ　$f(\theta) = \dfrac{1}{2}$ を満たすθを θ_1，θ_2 とおく。$\theta_1 + \theta_2$ は $\dfrac{\pi}{2}$ より 大きい