2 必須問題（配点50点）

k を正の定数とする。

座標平面上に2つの放物線 C_1: $y=kx^2$, C_2: $y=-x^2+2x$ があり C_1 と C_2 の原点以外の交点の x 座標を a とする。

（1） k を a を用いて表せ。

（2） C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積を S_1 とし C_2 と x 軸で囲まれた部分のうち $x \geqq a$ を満たす部分を S_2 とする。

（i） S_1, S_2 をそれぞれ a を用いて表せ。

（ii） $S_1=S_2$ となる a がただ1つ存在しそれが1と $\dfrac{6}{5}$ の間にあることを示せ。

解答

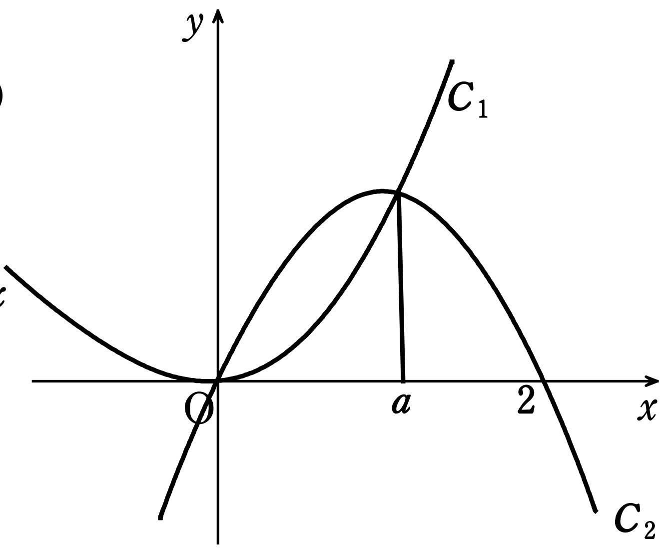
（1） C_1 と C_2 の交点の x 座標

$kx^2=-x^2+2x$

$x\{(k+1)x-2\}=0$　この解のうち

$x \neq 0$ の解が a より $(k+1)a-2=0$

k を a で表すと $k=\dfrac{2-a}{a}$



（2）（i） $S_1=\displaystyle\int_0^a \{(-x^2+2x)-kx^2\}dx$

$= -\displaystyle\int_0^a \left(\frac{2}{a}x^2-2x\right)dx$

$= -\left[\dfrac{2x^3}{3a}-x^2\right]_0^a=\dfrac{a^2}{3}$

$S_2=\displaystyle\int_a^2(-x^2+2x)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_a^2=\frac{a^3}{3}-a^2+\frac{4}{3}$

（ii） $S_1=S_2$ より　$\dfrac{a^2}{3}=\dfrac{a^3}{3}-a^2+\dfrac{4}{3}$

整理　$a^3-4a^2+4=0$　この a に関する3次方程式の解がただ 1つで

それが1と $\dfrac{6}{5}$ の間にあることを示す。

$f(a)=a^3-4a^2+4$ とおく

微分　$f'(a)=3a^2-8a=a(3a-8)$　題意より $0<a<2$

増減表

a	0		$\frac{8}{3}$		2
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$	4	↘	極小	↗	-4

$f(0)>0$，$f(2)<0$

$f(a)$ は連続関数　増減表より $0<a<2$ における　$f(a)=0$ の解はただ1つである。

ここで　$f(1)=1>0$，　$f\left(\frac{6}{5}\right)=\left(\frac{6}{5}\right)^3-4\left(\frac{6}{5}\right)^2+4=-\frac{4}{125}<0$ より

その解は 1 と $\frac{6}{5}$ の間にある。

3　必須問題（配点50点）

t を実数とする。

座標平面上に　円 C_t: $x^2+(t-8)x+y^2-2ty+12=0$ があり　その中心を P_t 半径を r とする。

（1）P_t の座標を求めよ。

（2）t の値に関わらず C_t が通る点の座標をすべて求めよ。

（3）t が $t>0$ の範囲を動くとき C_t の通過する領域をＤとおく。

（ｉ）Ｄを求め　座標平面上に図示せよ。

（ii）C_0 に内接する円のうち　その内部がすべてＤに含まれる円を考える。そのような円のうち　半径が最大の円をＫとする。Ｋの中心と半径を求めよ。

解答

（1）円 C_t: $x^2+(t-8)x+y^2-2ty+12=0$

変形して　$\left(x+\frac{t-8}{2}\right)^2+(y-t)^2=\frac{1}{4}(5t^2-12t+16)$

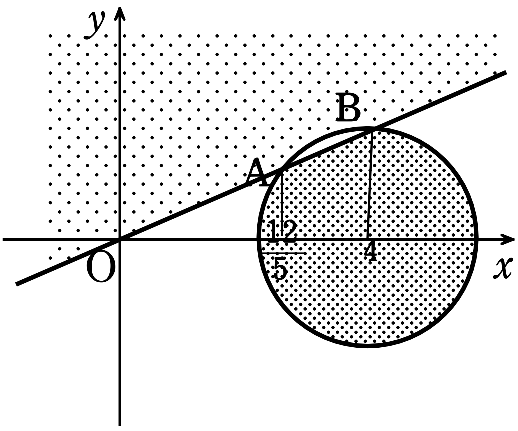
ここで　$5t^2-12t+16=5\left(t-\dfrac{6}{5}\right)^2+\dfrac{44}{5}>0$ であるから半径が存在

C_t の中心 $P_t\left(-\dfrac{t-8}{2},\ t\right)$

（２） C_t を t について整理　$(x-2y)t+x^2-8x+y^2+12=0$　t の値に関わらず成り立つためには　$x-2y=0$ かつ $x^2-8x+y^2+12=0$　連立方程式を解くと　$(x,\ y)=\left(\dfrac{12}{5},\ \dfrac{6}{5}\right)$, $(4,\ 2)$　この2点が求める点の座標である。

（３） t が $t>0$ の範囲を動くとき C_t の通過する領域をＤとおく。

ただし円 C_t: $(x-2y)t+(x-4)^2+y^2-4=0$



（ｉ） $x-2y=0$ のとき

$(x-4)^2+y^2-4=0$

このとき　$(x,\ y)=\left(\dfrac{12}{5},\ \dfrac{6}{5}\right)$, $(4,\ 2)$

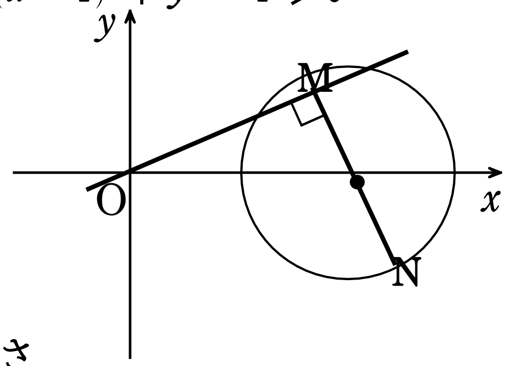
$x-2y\neq 0$ のとき

領域Ｄは上図、2点Ａ，Ｂ境界は含まない

$t=-\dfrac{(x-4)^2+y^2-4}{x-2y}$　$t>0$ であるから

$\dfrac{(x-4)^2+y^2-4}{x-2y}<0$　このとき $x-2y<0$, $(x-4)^2+y^2-4>0$

または $x-2y>0$, $(x-4)^2+y^2-4<0$



（ii） C_0: $(x-4)^2+y^2=4$

C_0 に内接する円のうちその内部がすべてＤに含まれる円Ｋ。Ｋの半径が最大となる円Ｋは中心がＭＮの中点　半径は $\dfrac{1}{2}MN$ の長さ

Ｍ（ $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{12}{5}+4\right)$, $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{6}{5}+2\right)$ すなわちＭ($\dfrac{16}{5}$, $\dfrac{8}{5}$)　次に　Ｎの座標

連立方程式　$x-2y=0$, $x^2-8x+y^2+12=0$ の解

有理数ではなくて無理数の解　$N\left(\dfrac{20+2\sqrt{5}}{5},\ -\dfrac{4\sqrt{5}}{5}\right)$

円Kの中心（$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{16}{5}+\dfrac{20+2\sqrt{5}}{5},\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{8}{5}-\dfrac{4\sqrt{5}}{5}\right)\right)$

すなわち $\left(\dfrac{18+\sqrt{5}}{5},\ \dfrac{4-2\sqrt{5}}{5}\right)$

円Kの半径　$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4}{\sqrt{5}}+2\right)=\dfrac{2}{\sqrt{5}}+1$

$\boxed{4}$　指定選択問題（配点50点）

$0<a<2$ かつ $a\neq 1$ を満たす定数 a に対し　関数 $f(x)$ を次式のように定める。

$$f(x)=(\log_a x)^2+\log_a \frac{2\sqrt{a}}{x^2}$$

（1）$t=\log_a x$ とおく。$f(x)$ を t と a を用いて表せ。

（2）$1\leqq x\leqq 2$ における $f(x)$ の最小値を m とおく。

（i）$a=\sqrt{2}$ のとき m を求めよ。

（ii）$m=\dfrac{1}{4}$ となるような a の値を求めよ。

$\boxed{\text{解答}}$

（1）$f(x)=(\log_a x)^2-2\log_a x+\log_a 2+\dfrac{1}{2}$　ここで　$t=\log_a x$ とおく

t の関数　$g(t)=t^2-2t+\log_a 2+\dfrac{1}{2}$

（2）関数 $t=\log_a x$

$1<a<2$のとき増加関数　　$0<a<1$ のとき減少関数

また　$g(t)=(t-1)^2+\log_a 2-\dfrac{1}{2}$

（i）$a=\sqrt{2}$ のとき

$1\leqq x\leqq 2$ のとき$0\leqq t\leqq 2$ であるから $t=1$ のとき最小となって

最小値 $m=g(1)=-1+\log_{\sqrt{2}} 2+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$

$a=\dfrac{1}{2}$ のとき

$1\leqq x\leqq 2$ のとき $-1\leqq t\leqq 0$ であるから　$t=0$ のとき最小となり

最小値 $m=g(0)=\log_{\frac{1}{2}}2+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}$

次に　$m=\dfrac{1}{4}$ となるときの a の値　　ただし　$0<a<2$ かつ $a\neq 1$

<u>$1<a<2$ のとき</u>

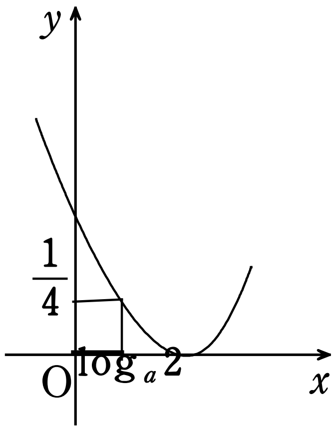
$0\leqq t\leqq \log_a 2$ において

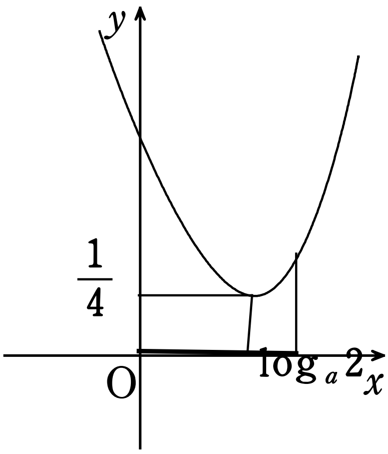
$g(t)=(t-1)^2+\log_a 2-\dfrac{1}{2}$

における最小値 $\dfrac{1}{4}$

$y=g(t)$ の対称軸 $t=1$ と

$\log_a 2$ との場合分け　右図





$0<\log_a 2<1$ の場合

最小値 $g(\log_a 2)=(\log_a 2)^2-2\log_a 2+\log_a 2+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$

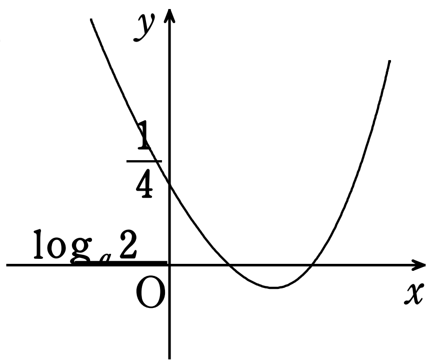
このとき $4(\log_a 2)^2-4\log_a 2+1=0$ より　$\{2\log_a 2-1\}^2=0$

よって　$\log_a 2=\dfrac{1}{2}$　$a=4$　条件 $1<a<2$ に反する。

$1\leqq \log_a 2$ の場合

最小値 $g(1)=\log_a 2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$，$\log_a 2=\dfrac{3}{4}$

$a^{\frac{3}{4}}=2$。 $a^3=16$　条件 $1<a<2$ に反する。



<u>$0<a<1$ のとき</u>

$\log_a 2\leqq t\leqq 0$ における最小値

$g(0)=\log_a 2+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$ よって $a=\dfrac{1}{16}$ これは条件を満たす