$\boxed{1}$　必須問題（配点40点）

（１）関数 $f(\theta)=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)+2\cos\theta$ ただし $0\leqq\theta\leqq\pi$ におけるこの関数の最大値と最小値を求めよ。

（２） $AB=2,\ BC=2\sqrt{7}, CA=4$ の三角形 ABC があり　辺 BC の中点をM　$\angle ABC=\theta$ とする。

（ｉ） $\cos\theta$ の値と線分AMの長さをそれぞれ求めよ。

（ii）三角形ABCの外接円と直線AMの交点のうち　Aと異なる方をDとする。線分ADの長さ　$\sin\angle ACD$の値をそれぞれ求めよ。

（３）Oを原点とする座標平面上に楕円　E： $\dfrac{x^2}{5}+y^2=1$ がある。Eの焦点のうち x 座標が正である方をFとする。Fを通り x 軸に垂直な直線とEの交点のうち y 座標が正である方をPとする。

（ｉ）Pの座標を求めよ。

（ii）PにおけるEの接線と x 軸, y 軸の交点をそれぞれQ, Rとする。三角形OQRの面積を求めよ。

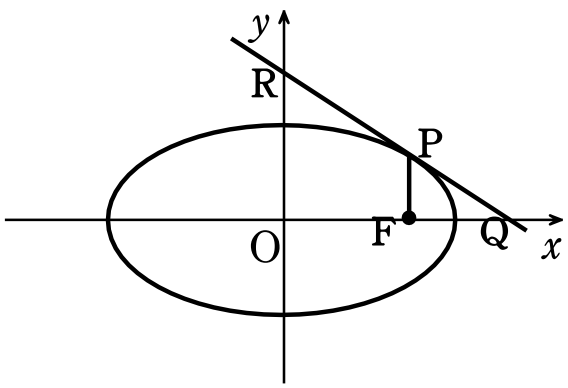
（４）極限　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)$ を求めよ。

$\boxed{解答}$

（１）Ⅱ型　$\boxed{1}$　（２）　参照

（２）Ⅱ型　$\boxed{1}$　（４）　参照

（３）楕円Eは右図　焦点 $(\pm2,\ 0)$



（ｉ）Pの座標　$\dfrac{2^2}{5}+y^2=1$

$y>0$ より　$P\left(2,\ \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$

（ii）PにおけるEの接線 $\dfrac{2x}{5}+\dfrac{y}{\sqrt{5}}=1$

$y=0$ のとき $x=\dfrac{5}{2}$，$x=0$ のとき $y=\sqrt{5}$　ゆえに△QRの面積 $\dfrac{5\sqrt{5}}{4}$

（４）与式は定積分 $\int_0^1 \sqrt{1+x}\ dx$ と表される。

$$\int_0^1 \sqrt{1+x}\,dx = \left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_0^1 = \frac{2}{3}\left[(1+x)\sqrt{1+x}\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{3}(2\sqrt{2}\ -1)$$

$\boxed{2}$　必須問題（配点40点）

片方の面が白色　もう片方の面が黒色の3枚のカードがあり　3枚とも白色の面を上にして横一列にテーブルに置かれている。次の操作を繰り返し行う。

（操作）袋の中に1が書かれた球　2が書かれた球　3が書かれた球　合計3個の球が入っている。この袋の中から無作為に1個の球を取り出し取り出した球に書かれた数字 $k\,(k=1,2,3)$ に対して　左から k 番目のカードを裏返し取り出した球は袋に戻す。

この操作を n 回 $(n=1,2,3,\cdots)$ を行ったとき　左端のカードの上面が白色である確率を p_n とする。

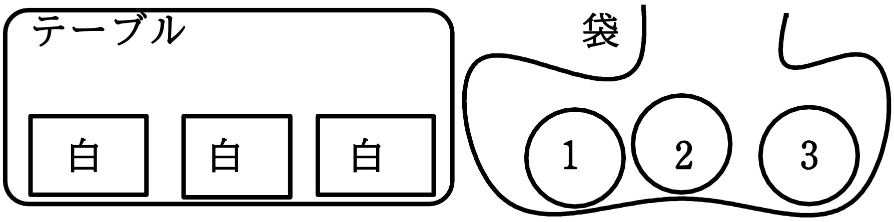
（１）p_1, p_2 を求めよ。

（２）p_{n+1} を p_n を用いて表せ。また p_n を求めよ。

（３）$n \geqq 3$ とする。n 回目の操作後に左端のカードの上面が白色であったとき2回目の操作後に3枚とも上面が白色である条件付き確率 q_n を求めよ。

解答

（１）p_1 とは



1回目の操作で左から2番目または3番目のカードが裏返しされて左端のカードはそのままである確率

$$p_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

p_2 とは

2回目の操作後で左端のカードの上面が白色である確率

場合分け

左端のカードの上面の色　　1回目の操作後の色→2回目の操作後の色

白色→白色または黒色→白色　すなわち p_1 と $(1-p_1)$ で場合分け

$$p_2 = p_1 \times \frac{2}{3} + (1-p_1) \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{9}$$

（２） $p_{n+1} = p_n \times \frac{2}{3} + (1-p_n) \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}$ 特性方程式$\alpha = \frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{3}$ の活用

変形 $p_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}\left(p_n - \frac{1}{2}\right)$　数列 $\left\{p_n - \frac{1}{2}\right\}$ は初項 $p_1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ 公比 $\frac{1}{3}$

の等比数列　$p_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$　ゆえに $p_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3^n} + 1\right)$

（３）条件付き確率　$\dfrac{分子}{分母}$の形

分母＝ n 回目の操作後に左端のカードの上面が白色であ る確率

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3^n} + 1\right)$

分子＝2回目の操作後に3枚とも上面が白色であって　かつ n 回目の操作後に左端のカードの上面が白色であ る確率

まず　1回目の操作後における3種類のカーの色に着目して2回目の操作後の色は3枚ともすべて白色である確率

(□ □ □) ⟶ (白 白 白)

(白　白　黒）または（白　黒　白）または（黒　白　白）これらの確率は（ $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$)$\times 3 = \frac{1}{3}$ かつ　3回目以降の操作では残り

$(n-2)$回後の操作で左端のカードの上面が白 色である確率 p_{n-2}

従って　分子の確率＝ $\frac{1}{3} \times p_{n-2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3^{n-2}} + 1\right)$

ゆえに条件付き確率＝ $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3^{n-2}} + 1\right) \div \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3^n} + 1\right) = \frac{3^{n-1} + 3}{3^n + 1}$