2024年度　第3回　全統記述模試問題　数学　⑤　誤り問題

次のア～オのうち誤りがあれば　その記号を選び　なければなしと示しなさい。

$\boxed{1}$　箱の中に　1が書かれたカードが1枚　2が書かれたカードが2枚　3が書かれたカードが3枚　合計6枚のカードが入っている。また　袋の中に　赤球が1個, 白球が　2個, 青球が3個　合計6個の球が入っている。
箱の中からカードを無作為に1枚取り出し　そのカードに書かれた数だけ袋の中から球を無作為に取り出す。このとき　袋の中に残っている球に対して
次のように得点Xを定める。

- 残った球の色がちょうど1種類のとき　X＝1
- 残った球の色がちょうど2種類のとき　X＝2
- 残った球の色がちょうど3種類のとき　X＝3

ア　1が書かれたカードを取り出し　かつ　X＝1 である確率は0である

イ　2が書かれたカードを取り出し　かつ　X＝2 である確率

箱から2が書かれたカードを1枚取り出す確率 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$　かつ　X＝2である

確率　袋から2球を取り出したとき　袋の中に残した球の色がちょうど2種類　すなわち　取り出した球の色が（赤1,白1）(赤1, 青１）である。

求める確率　$\frac{1}{3}\times\frac{1\times{}_2C_1+1\times{}_3C_1}{{}_6C_2}=\frac{1}{3}\times\frac{5}{15}=\frac{1}{9}$

ウ　3が書かれたカードを取り出し　かつ　X＝3 である確率

$$\frac{1}{2}\times\frac{{}_2C_1\times{}_3C_2}{{}_6C_3}=\frac{1}{2}\times\frac{6}{20}=\frac{3}{20}$$

エ　1が書かれたカードを取り出し　かつ　X＝3 である確率

袋から1球を取り出したとき　袋の中に残した球の色がちょうど3種類
すなわち　取り出した1球が白球または青球である。

求める確率　$\dfrac{1}{6}\times\dfrac{{}_2C_1+{}_3C_1}{{}_6C_1}=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{5}{6}=\dfrac{5}{36}$

オ　2が書かれたカードを取り出し　かつ　X＝3 である確率

$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{{}_2C_1\times{}_3C_1+{}_3C_2}{{}_6C_2}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{6+3}{15}=\dfrac{1}{5}$

以上より　X＝3 である確率

$\dfrac{3}{20}+\dfrac{5}{36}+\dfrac{1}{5}=\dfrac{7}{20}+\dfrac{5}{36}=\dfrac{63+25}{4\times5\times9}=\dfrac{88}{4\times5\times9}=\dfrac{22}{45}$

$\boxed{2}$　片方の面が白色　もう片方の面が黒色の3枚のカードがあり　3枚とも白色の面を上にして横一列にテーブルに置かれている。次の操作を繰り返し行う。

（操作）袋の中に1が書かれた球　2が書かれた球　3が書かれた球　合計3個の球が入っている。この袋の中から無作為に1個の球を取り出し取り出した球に書かれた数字 k $(k=1, 2, 3)$ に対して　左から k 番目のカードを裏返し取り出した球は袋に戻す。

この操作を n 回 $(n=1, 2, 3, \cdots)$ を行ったとき　左端のカードの上面が白色である確率を p_n, 黒色である確率を q_n とする。

ア　$p_1=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$　　$q_1=\dfrac{1}{3}$

イ　$p_2=\dfrac{2}{3}p_1+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{5}{9}$　　$q_2=\dfrac{2}{3}q_1+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{9}$

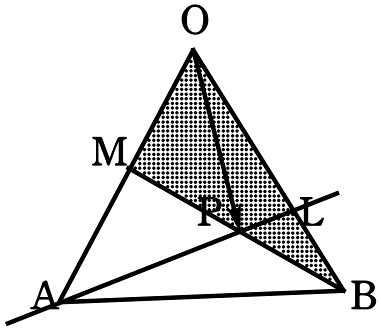
ウ　$p_n+q_n=1$

エ　$p_{n+1}=\dfrac{2}{3}p_n+\dfrac{1}{9}$　　$q_{n+1}=\dfrac{2}{3}q_n+\dfrac{2}{9}$

オ　$p_{n+1}=\frac{2}{3}p_n+\frac{1}{3}q_n$　　$q_{n+1}=\frac{2}{3}q_n+\frac{1}{3}p_n$

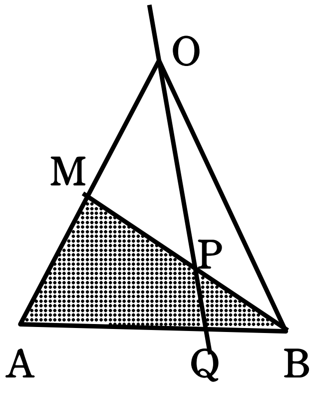
$\boxed{3}$　1辺の長さ1の正三角形ＯＡＢがあり $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とする。　る。
辺ＯＡの中点をＭ　辺ＯＢを 3：1 に内分する点をＬとし　2直線ＡＬ, ＢＭの交点をＰとする。

ア　正三角形ＯＡＢの面積 $\frac{\sqrt{3}}{4}$



イ　$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表す
三角形ＯＢＭに割線ＡＬを適用して
メネラウスの定理
$\frac{OL}{LB}\cdot\frac{BP}{PM}\cdot\frac{MA}{AO}=1$ 代入 $\frac{3}{1}\cdot\frac{BP}{PM}\cdot\frac{1}{2}=1$

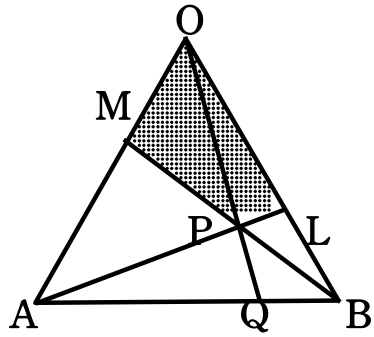
$BP:PM=2:3$　よって $\overrightarrow{OP}=\frac{2}{5}\overrightarrow{OM}+\frac{3}{5}\overrightarrow{OB}=\frac{1}{5}\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}$



ウ　直線ＯＰと線分ＡＢとの交点をＱとする。
三角形ＭＡＢに割線ＡＰを適用して
メネラウスの定理
$\frac{MP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QA}\cdot\frac{AO}{OM}=1$ 代入 $\frac{3}{2}\cdot\frac{BQ}{QA}\cdot\frac{2}{1}=1$

$BQ:QA=1:3$　よって $\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}$

また $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{5}\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}$ より　$\overrightarrow{OQ}=\frac{5}{4}\overrightarrow{OP}$



エ　△ＯＡＱの面積 S_1, △ＯＢＱの面積 S_2 とおく。
四角形ＯＭＰＬの面積
$S_1\times\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}+S_2\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\ =\ \frac{1}{5}(2S_1+3S_2)$

五角形MABLPの面積 $(S_1+S_2)-\frac{1}{5}(2S_1+3S_2)=\frac{1}{5}(3S_1+2S_2)$

オ　$S_1=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{3}{4}$，$S_2=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{1}{4}$

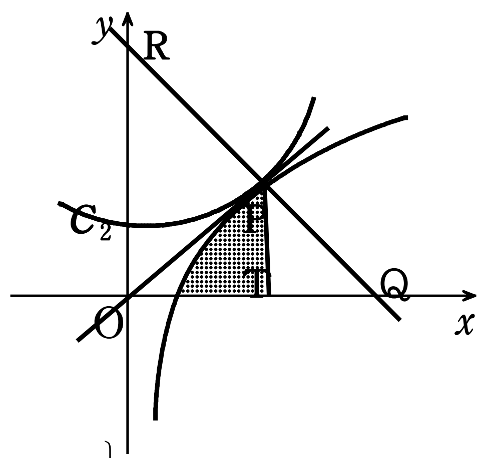
$2S_1+3S_2=\frac{9\sqrt{3}}{16}$，$3S_1+2S_2=\frac{9\sqrt{3}\ +2\sqrt{3}}{16}=\frac{11\sqrt{3}}{16}$

ゆえに 四角形OMPLと 五角形MABLPの面積比

$\frac{1}{5}\times\frac{9\sqrt{3}}{16}:\frac{1}{5}\times\frac{11\sqrt{3}}{16}=9:11$

$\boxed{4}$ 座標平面上に曲線 C_1: $y=e\log x$ がある。ただし e は自然対数の底である。C_1 上の点 $P(e,\ e)$ における C_1 の法線 l と x 軸, y 軸との交点をそれぞれ Q, R とし　Rを中心として C_1 に接する円を C_2 とする。C_1，C_2，x 軸, y 軸で囲まれた図形の面積を求めてみよう。

ア　l の方程式 $y=-x+2e$



イ　C_2 の半径 $\frac{\|2e-0\|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\,e$

ウ　C_1，x軸，直線 $x=e$ で囲まれた部分の面積

$S_1=\int_1^e e\log x\,dx$

$=e\int_1^e x'\log x\,dx=e\left\{\left[x\log x\right]_1^e-\int_1^e x\cdot(\log x)'dx\right\}\ e\{e-(e-1)\}=e$

エ　Pから x 軸への垂線の足T　直角二等辺三角形PQTの面積 $S_2=\frac{e^2}{2}$

円 C_2 と y 軸との交点のうち原点に近い方の交点とする y 軸と C_2で

囲まれた扇形の面積 $S_3=\frac{\pi(\sqrt{2}\,e)^2}{8}=\frac{\pi e^2}{4}$

オ　求める図形の面積

S＝（直角二等辺三角形OQRの面積）－$\{S_1+S_2+S_3\}$

$$=2e^2-\left(e+\frac{e^2}{2}+\frac{\pi e^2}{4}\right)=\frac{1}{4}(6-\pi)e^2-e$$

$\boxed{5}$　2つの複素数 z と w の間に　$w=\dfrac{\beta z}{z-\alpha}$ なる関係式がある。

ここでα，βは複素数の定数であり i を虚数単位として　$z=1$ のとき $w=2i$
$z=2$ のとき $w=2+2i$ であるとする。

ア　複素数α，βの値

連立方程式　$2i=\dfrac{\beta}{1-\alpha}$，$2+2i=\dfrac{2\beta}{2-\alpha}$　βを消去

$4i(1-\alpha)=2(1+i)(2-\alpha)$　解くと　$\alpha=1+i$，$\beta=2$

イ　複素数平面上において 点 z が実軸上を動くとき　点 w が描く軌跡

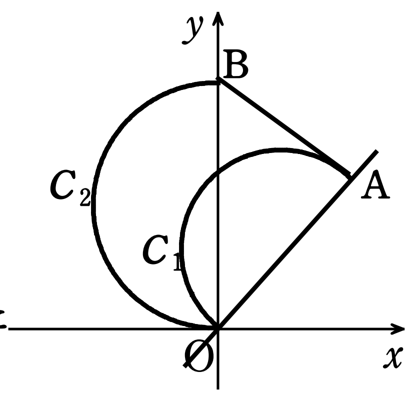
$w=\dfrac{2z}{z-(1+i)}$　z について解くと $z=\dfrac{(1+i)w}{w-2}$　点 z が実軸上を動く

ための条件は $z=\overline{z}$ よって $\dfrac{(1+i)w}{w-2}=\dfrac{(1-i)\overline{w}}{\overline{w}-2}$　整理すると

$2iw\overline{w}-2(1+i)w+2(1-i)\overline{w}=0$。 $w=x+yi$ とおく。実数x，y を用いて $i(x^2+y^2-x-y-x-y)+(-x+y+x-y)=0$　実部　虚部に 整理すると $(x-1)^2+(y-1)^2=2$

点 w が描く図形は中心 $1+i$ 半径 $\sqrt{2}$ の円である

ウ　複素数平面上において点 z が実軸の0以上の部分を動くとき点 w が描く軌跡を C_1　点 $(1+i)w$ が描く図形 C_2 とする。点 w が描く図形はイで求めた円のうち半円部分であると考えられる。右図



C_1 の端点 $O(0)$ と $A(2+2i)$ はそれぞれ C_2 の端点 $O(0)$, $B(4i)$ に移る。

エ　直角三角形OABの面積 $\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\ \times 2\sqrt{2}=4$

オ　C_1 と C_2，線分ABで囲む部分の面積の求め方が最も簡単な解法は
半径 2　中心 $(2i)$である C_2 の八分円の面積から直角三角形OABの面積
を差し引いて得る解法

答え

$\boxed{1}$　イ　$\boxed{2}$　エ　$\boxed{3}$　なし　$\boxed{4}$　なし

$\boxed{5}$　オ