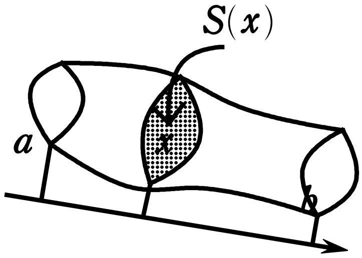
（２）体積

①　定積分と体積

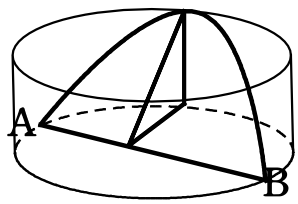
面積を区分求積法によって　定積分で表した。同様に　立体の体積も区分求積法を用いて定積分で表すことにする。



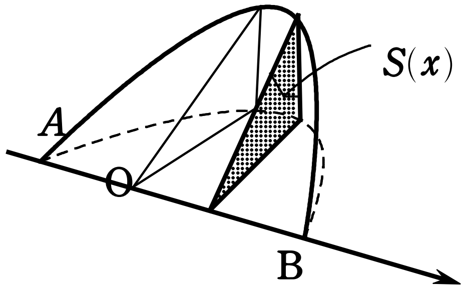
立体が x 軸に垂直な2つの平面で切ったときの x 軸との交点の x 座標を a，bとして $a \leqq x \leqq b$ を満たす x 座標が x である x 軸に垂直な平面で切り取られた断面の断面積を $S(x)$ とおく。

$$\text{体積V} = \int_a^b S(x)dx$$

例題　底面の半径 a　　高さも a である直円柱がある。この底面の直径を含み底面と45°の傾きを成す平面でこの直円柱を2つの立体の分ける。小さい方の立体の体積を求めよ。



解答　底面の中心をO　直径ABを x 軸にとると線分OB上に x 座標が x で x 軸に垂直な平面で切り取った断面は45°の直角二等辺三角形であるから　その断面積 $S(x)$ は



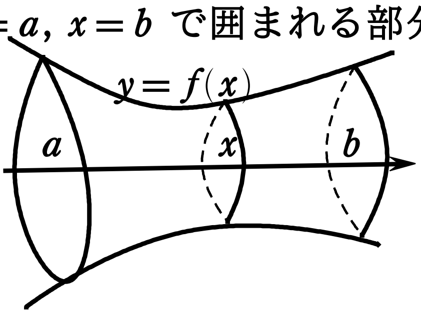
$$S(x) = \frac{1}{2} \times \sqrt{a^2 - x^2} \times \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$= \frac{1}{2}(a^2 - x^2)$$

$$\text{求める体積V} = 2\int_0^a S(x)dx = \int_0^a (a^2 - x^2)dx = \frac{2}{3}a^3$$

②　回転体の体積

$a < b$ のとき曲線 $y = f(x)$ を x 軸および2直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれる部分を x 軸の周りに1回転させてできる立体の体積をVとする。点 $(x,\ y)$ を通り x 軸に垂直な平面で切り取った断面は円でその面積 $S(x) = \pi\{f(x)\}^2$



よって 回転体の体積　$\mathrm{V} = \pi \displaystyle\int_a^b \{f(x)\}^2 dx$

例題　ドウナッツ型の体積

$0<r<b$ とする。円 $(x-a)^2+(y-b^2=r^2)$ を x 軸の周りに1回転させてできる立体の体積Vを求めよ。

解答　中心 $(a,\ b)$ 半径 r の円を x 軸方向に $(-a)$ だけ平行移動した円 $x^2+(y-b)^2=r^2$ を x 軸の周りに1回転させてできる立体の体積と等しいことに着目。 $x^2+(y-b)^2=r^2$ を y について解くと　$y-b=\pm\sqrt{r^2-x^2}$

より $y=b\pm\sqrt{r^2-x^2}$

直線 $y=b$ の上側にある半円 $y=b+\sqrt{r^2-x^2}$ と x軸　さらに　2直線 $x=-r,\ x=r$ で囲まれた部分を x 軸の周りに1回転させてできる立体の体積 V_1　直線 $y=b$ の下側にある半円 $y=b-\sqrt{r^2-x^2}$ と x軸　さらに 2直線 $x=-r,\ x=r$ で囲まれた部分を x 軸の周りに1回転させてできる立体の体積 V_2　求める ドウナッツ型の体積V$=V_1-V_2$ である。

定積分を用いて　$\mathrm{V}=\pi\int_{-r}^{r}\left(b+\sqrt{r^2-x^2}\right)^2dx-\pi\int_{-r}^{r}\left(b-\sqrt{r^2-x^2}\right)^2dx$

$$=\pi\int_{-r}^{r}\left\{\left(b+\sqrt{r^2-x^2}\right)^2-\left(b-\sqrt{r^2-x^2}\right)^2\right\}dx$$

$$=\pi\int_{-r}^{r}\left\{\left(b^2+2b\sqrt{r^2-x^2}+r^2-x^2\right)-\left(b^2-2b\sqrt{r^2-x^2}+r^2-x^2\right)\right\}dx$$

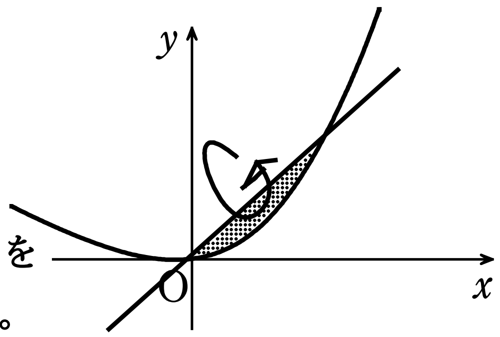
$$=4\pi b\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx=4\pi b\times\frac{\pi r^2}{2}=2\pi^2br^2$$

<u>注意</u>　ドウナッツ型の回転体の体積

$\pi\int_a^b\{f(x)-g(x)\}^2dx$ ではなくて　$\pi\int_a^b\left[\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2\right]dx$ ですよ

③　一般の回転体の体積

空間における直線 l の周りの回転体の体積の求め方は　直線 l に垂直な平面で切りとった切口の断面積の定積分で求める。



<u>例題</u>　放物線　$y=x^2$ と直線 $y=x$ で囲まれた部分を直線 l の周りに1回転できる立体の体積を求めよ。

解答　放物線と直線の交点を原点O　A(1, 1)

とおく。

$0 \leqq x \leqq 1$ とし　放物線上の点P(x, x^2) から

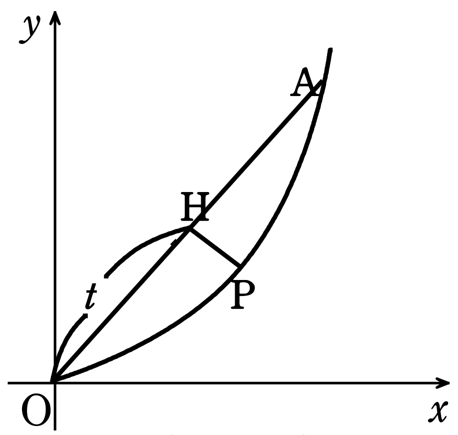
直線 $x-y=0$ に垂直に下した垂線PHの長さ

$h=\dfrac{|x-x^2|}{\sqrt{2}}=\dfrac{x-x^2}{\sqrt{2}}$

ここで　OH $= t$ とおく。従って　この回転体

の体積　$V=\pi\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} h^2 dt$

$=\pi\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \dfrac{(x-x^2)^2}{2} dt$



$H\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}t,\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}t\right)$

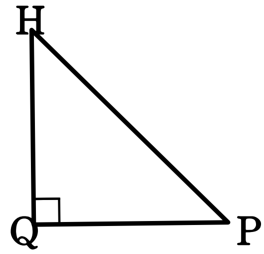
$P\,(x,\ x^2)$

変数 x と t の関係式が欲しい。

$h^2=PH^2$ より　$\dfrac{(x-x^2)^2}{2}=\left(x-\dfrac{t}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(x^2-\dfrac{t}{\sqrt{2}}\right)^2$

この式に着目して 変形したが　うまくいかん！

悩む　教科書参照



直角二等辺三角形PQHに着目してQH＝QP

$\dfrac{t}{\sqrt{2}}-x^2=x-\dfrac{t}{\sqrt{2}}$ より　$\sqrt{2}\,t=x^2+x$　微分　$\sqrt{2}\,dt=(2x+1)dx$

$t=0$ のとき $x=0$　$t=\sqrt{2}$ のとき $x=1$

従って　$V=\pi\displaystyle\int_0^1 \dfrac{(x-x^2)^2}{2}\cdot\dfrac{2x+1}{\sqrt{2}}\,dx$

$=\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}\displaystyle\int_0^1 x^2(1-x)^2(2x+1)dx$

$=\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}\displaystyle\int_0^1 (x^2-3x^4+2x^5 dx)$

$x^2(1-x)^2(2x+1)$

$=x^2(1-2x+x^2)(1+2x)$

$=x^2(1-4x^2+x^2+2x^3)$

$=x^2(1-3x^2+2x^3)$

$=\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}\left[\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3x^5}{5}+\dfrac{x^6}{3}\right]_0^1=\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{3}{5}+\dfrac{1}{3}\right)$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{60}\pi$