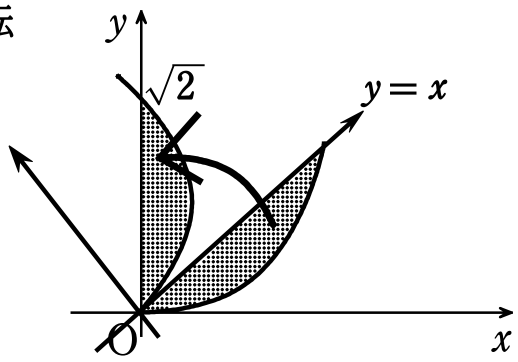


別解　囲まれた部分を原点中心　45° だけ正の回転をして　その部分を y 軸周りに1回転した立体の体積として求めてみよう。

放物線上の点（x, y)　この点を原点中心 45° だけ正の回転した点を(X, Y)とおく。

ここで　複素数平面上における回転を用いると

$$X+Yi=(x+yi)(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)$$

$$=(x+yi)\times\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\{(x-y)+(x+y)i\}$$

$y=x^2$

$X=\dfrac{x-y}{\sqrt{2}}$

$\mathrm{Y}=\dfrac{x+y}{\sqrt{2}}$

$X=\dfrac{x-y}{\sqrt{2}}$, $\mathrm{Y}=\dfrac{x+y}{\sqrt{2}}$より x, y について解くと

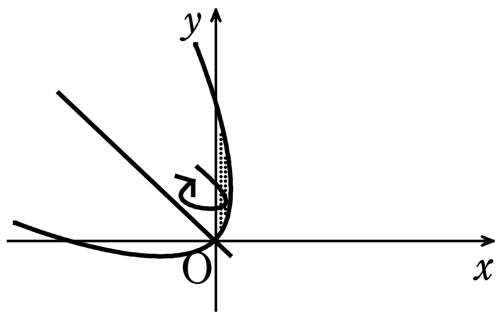
$x=\dfrac{X+Y}{\sqrt{2}}$, $\mathrm{y}=-\dfrac{X-Y}{\sqrt{2}}$　(x, y)の関係式 $y=x^2$ に代入すると (X, Y)の関係式が得られる。

新しく座標軸をX軸　Y軸として　求める体積　$\mathrm{V}=\pi\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}}X^2dY$ であるとしてもいいが　ここでは　改めて x, y であらわすことにして

$$\mathrm{V}=\pi\int_0^{\sqrt{2}}x^2dy$$

$-\dfrac{X-Y}{\sqrt{2}}=\left(\dfrac{X+Y}{\sqrt{2}}\right)^2$ より　$-\sqrt{2}(x-y)=(x+y)^2$　ここから x^2 を y で表す…　凄い計算になりそうだ！

やってみよう



$-\sqrt{2}(x-y)=(x+y)^2$ を x について解く

$-\sqrt{2}x+\sqrt{2}y=x^2+2xy+y^2$ より

$x^2+\sqrt{2}(\sqrt{2}y+1)x+y(y-\sqrt{2})=0$

$x\geqq 0$, $y\geqq 0$ より　$x=\dfrac{-\sqrt{2}(\sqrt{2}y+1)+\sqrt{2(\sqrt{2}y+1)^2-4y(y-\sqrt{2})}}{2}$

根号内 $2(\sqrt{2}\,y+1)^2-4y(y-\sqrt{2})=2(2y^2+2\sqrt{2}\,y+1)-4y(y-\sqrt{2})$

$=2(4\sqrt{2}\,y+1)$

$x=\dfrac{-\sqrt{2}(\sqrt{2}\,y+1)+\sqrt{2}\sqrt{4\sqrt{2}\,y+1}}{2}$　　$\sqrt{2}$ で約分

$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left\{-(\sqrt{2y}+1)+\sqrt{4\sqrt{2}\,y+1}\right\}$　従って　x^2 の計算

$x^2=\dfrac{1}{2}\left\{(\sqrt{2}\,y+1)^2-2(\sqrt{2}\,y+1)\sqrt{4\sqrt{2}\,y+1}+4\sqrt{2}\,y+1\right\}$

$=\dfrac{1}{2}\left\{2y^2+2\sqrt{2}\,y+1-2(\sqrt{2}\,y+1)\sqrt{4\sqrt{2}\,y+1}+4\sqrt{2}\,y+1\right\}$

$=y^2+3\sqrt{2}\,y-(\sqrt{2}\,y+1)\sqrt{4\sqrt{2}\,y+1}+1$

従って　$\mathrm{V}=\pi\int_0^{\sqrt{2}}x^2dy$

$=\pi\int_0^{\sqrt{2}}\left\{y^2+3\sqrt{2}\,y-(\sqrt{2}\,y+1)\sqrt{4\sqrt{2}\,y+1}+1\right\}dy$

置換積分　$\sqrt{4\sqrt{2}\,y+1}=t$ とおく。2乗して　$4\sqrt{2}\,y+1=t^2$

このとき　$y=\dfrac{t^2-1}{4\sqrt{2}}$　微分　$4\sqrt{2}\,dy=2tdt$　より $dy=\dfrac{t}{2\sqrt{2}}\,dt$

$y=0$ のとき $t=1$，$y=\sqrt{2}$ のとき $t=3$　さらに yの式をt に置き換える

$y^2=\dfrac{(t^2-1)^2}{32}$，$3\sqrt{2}\,y=3\sqrt{2}\times\dfrac{t^2-1}{4\sqrt{2}}=\dfrac{3(t^2-1)}{4}$，$\sqrt{2}\,y+1=\dfrac{t^2+3}{4}$

$y^2+3\sqrt{2}\,y-(\sqrt{2}\,y+1)\sqrt{4\sqrt{2}\,y+1}+1$

$=\dfrac{(t^2-1)^2}{32}+\dfrac{3(t^2-1)}{4}-\dfrac{t^2+3}{4}\times t+1$

$=\dfrac{(t^2-1)^2}{32}+\dfrac{3t^2-3-t^3-3t}{4}+1$

$=\dfrac{1}{32}\left\{(t^4-2t^2+1)-8(t^3-3t^2+3t+3)+32\right\}$

$=\dfrac{1}{32}(t^4-8t^3+22t^2-24t+9)$

$$\mathrm{V}=\frac{\pi}{32}\int_1^3(t^4-8t^3+22t^2-24t+9)\times\frac{t}{2\sqrt{2}}\,dt$$

$$=\frac{\sqrt{2}\,\pi}{32\times4}\int_1^3(t^5-8t^4+22t^3-24t^2+9t)dt$$

定積分に挑戦　やってみよう…

$$\int_1^3(t^5-8t^4+22t^3-24t^2+9t)dt$$

$$=\left[\frac{t^6}{6}-\frac{8}{5}t^5+\frac{11}{2}t^4-8t^3+\frac{9}{2}t^2\right]_1^3$$

$$=\frac{1}{30}\left[5t^6-48t^5+165t^4-240t^3+135t^2\right]_1^3$$

ここで　定積分の数値計算

$$\left[5t^6-48t^5+165t^4-240t^3+135t^2\right]_1^3$$

$$=5(3^6-1^3)-48(3^5-1^5)+165(3^4-1^4)-240(3^3-1^3)+135(3^2-1^2)$$

$$=5\times728-48\times242+165\times80-240\times26+135\times8$$

$$=3640-11616+13200-6240+1080$$

$$=17920-17856$$

$$=64$$

従って　$\mathrm{V}=\dfrac{\sqrt{2}\,\pi}{32\times4\times30}\times64=\dfrac{\sqrt{2}\,\pi}{4\times30}\times2=\dfrac{\sqrt{2}\,\pi}{60}$

やった！　凄い計算　電卓に感謝…