1　a，b を 0 以上の実数とする。以下　X，Y に関する方程式

（＊）　$\log X + \log Y = a$，$\log(X+Y) = b$　を考える。

（１）X，Yが（＊）を満たすとき　X＋YおよびXYを a，b を用いて表せ。

（２）X，Yが（＊）を満たす正の実数X，Yが存在するための a，b の条件を求めよ。

（３）X，Yが（＊）を満たす1以上の実数X，Yが存在するための a，b の条件を求めよ。

（４）a，b が (3) の条件を満たすとき　$a+b$ の最小値を求めよ。

解法の糸口

① 対数の性質　$\log X + \log Y = \log XY$ より $\log X + \log Y = a$ のとき
XY＝ e^{a}　　$\log(X+Y) = b$ のときX＋Y＝ e^{b}

② X，Yが実数とは　t の2次方程式 $(t-X)(t-Y)=0$ が実数解　すなわち
$t^{2} - (X+Y)t + XY = 0$ の判別式＝ $(X+Y)^{2} - 4XY \geqq 0$

③ $X \geqq 1$，$Y \geqq 1 \Leftrightarrow X-1 \geqq 0$，$Y-1 \geqq 0$
$\Leftrightarrow (X-1)+(Y-1) \geqq 0$, $(X-1)(Y-1) \geqq 0$ かつ X, Yは実数

④ $a+b$ の最小値　$XY = e^{a} = u$，$X+Y = e^{b} = v$ とおく。
$a+b$ の最小は $e^{a} + e^{b} = u+v$ の最小でもある
このとき$2 \leqq v \leqq 1+u$，$v^{2} - 4u \geqq 0$ を満たすとき $u+v$ の最小を考える

解答

今後　詳細な解答は　メルカリで参照してください

感想

X, Yを実数解とする t に関する2次方程式　$(t-X)(t-Y)=0$
展開して $t^{2} - (X+Y)t + XY = 0$
$X \geqq 1$，$Y \geqq 1$ との同値関係を　$X+Y \geqq 2$，$XY \geqq 1$と考えたり　X, Yの実数条件　判別式＝（X＋Y $)^{2} - 4XY \geqq 0$　この実数条件を見落としたり注意　注意 …
（４）点 (a, b) を領域とする領域内の $a+b$ の最小値　$a+b=k$ とおいて k の最小値を考えるのが解法の定石であるが…

ここは $e^a + e^b = u + v$ とおくことで簡単に最小値を求めることが出来て有難たかった。受験生に優しい出題となっていて感謝…