4　曲線 $y=\dfrac{x^2}{2}-1$ をＣとする。

（１）曲線Ｃ上の点 $\left(t,\ \dfrac{t^2}{2}-1\right)$ $(t\neq 0)$ における法線の方程式を求めよ。

（２）点 $\left(-1,\ \dfrac{3}{2}\right)$ を通る曲線Ｃの異なる2つの法線を求めよ。

（３）(1)で求めた法線のうち　点（X，Y）$(X\neq 0)$ を通るものがちょうど2つ存在するための条件をＸとＹの関係式で表せ。

（４）曲線Ｃの $x\geqq 0$ の部分と(2)で求めた2つの法線で囲まれた図形の面積を求めよ。

解法の糸口

① 法線とは　接線に垂直な直線

② 法線が点 $\left(-1,\ \dfrac{3}{2}\right)$ を通ることから　ｔの3次方程式を解く　と

1つの実数解と重解　異なる2つの解を得る

③ 法線のうち点（X，Y）$(X\neq 0)$ を通るものがちょうど2つ (2) が参考

法線　$y=-\dfrac{1}{t}x+\dfrac{t^2}{2}$ が点 $(X,\ Y)$ を通るから $Y=-\dfrac{X}{t}+\dfrac{t^2}{2}$　より

$t^3-2Yt-2X=0$　左辺＝ $t^3-2Yt-2X$ が　$(t-\beta)(t-\alpha)^2$ の形に

表示　　tに関する恒等式　$t^3-2Yt-2X=(t-\beta)(t-\alpha)^2$

$t=\beta$ とおくと　$\beta^3-2Y\beta-2X=0$

微分　$3t^2-2Y=(t-\alpha)^2+2(t-\beta)(t-\alpha)$　$t=\alpha$ とおくと

$3\alpha^2-2Y=0$　さらに　微分　$6t=2(t-\alpha)+2(t-\alpha+t-\beta)$

$t=\alpha$ とおくと　$6\alpha=2(\alpha-\beta)$　よって　$\beta=-2\alpha$

従って　$-8\alpha^3+4\alpha Y-2X=0$　$2Y=3\alpha^2$ を代入

$-8\alpha^3+6\alpha^3-2X=0$　よって　$X=-\alpha^3$ より $\alpha=-\sqrt[3]{X}$

従って　$2Y=3\sqrt[3]{X^2}$　　ゆえに　$8Y^3=27X^2$

④ 題意を的確にとらえて　囲まれた図形の図示　その面積

$\boxed{\text{解答}}$

今後　詳細な解答はメルカリを参照してください

$\boxed{\text{感想}}$

放物線　法線　最も基本的な題材で有難い。計算に十分注意して　完答したいですね…