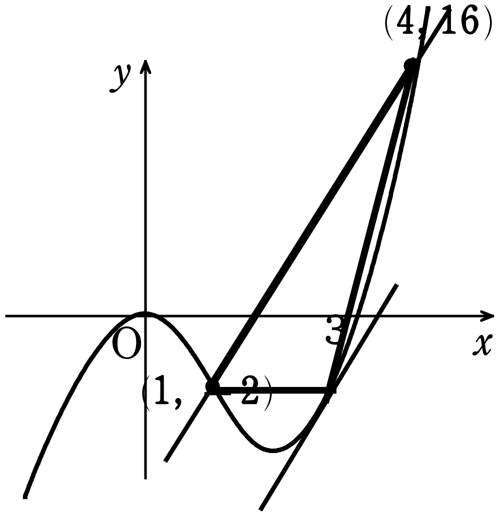
$\boxed{1}$ 曲線 $y=x^3-3x^2$ をＣとする。Ｃ上の点Ｐ $(4,16)$ およびＣの変曲点Ｑについて　以下の問いに答えよ。

（１）点ＱにおけるＣの接線および法線の方程式を求めよ。

（２）Ｃ上の点Ｒが点Ｐと点Ｑの間を動くとき　三角形ＰＱＲの面積が最大となる点Ｒの x座標αを求めよ。

（３）(2)のαに対して　定積分 $\int_{\alpha}^{4}(x^3-3x^2)\,dx$ を求めよ。

解法の糸口



① 曲線Ｃ $y=x^2(x-3)$ の図示

② 微分 $y'=3x^2-6x=3x(x-2)$

$y''=6x-6=6(x-1)$　変曲点（1,−2)

③ 三角形PQRの面積が最大　直線PQと平行な接線である曲線PQ上の接点Ｒ
接点Ｒの x 座標がαである

④ αの値　直線PQの傾きと接点Ｒの x 座標が等しい　$\dfrac{16+2}{4-1}=3\alpha^2-6\alpha$　よって $\alpha^2-2\alpha-2=0$　ただし $1<\alpha<4$

⑤ 定積分 $\int_{\alpha}^{4}(x^3-3x^2)\,dx$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-x^3\right]_{\alpha}^{4}=\left(\frac{4^4}{4}-4^3\right)-\left(\frac{\alpha^4}{4}-\alpha^3\right)=\alpha^3-\frac{\alpha^4}{4}$$

$\alpha=1+\sqrt{3}$ より　$\alpha^2=(1+\sqrt{3})^2=4+2\sqrt{3}$　$\alpha^4=(4+2\sqrt{3})^2$

$\alpha^3=(4+2\sqrt{3})(1+\sqrt{3})$

解答

今後　詳細な解答はメルカリを参照してください

感想

三角形の面積が最大は点Ｒが接点であることに着目。また　題意に従って丁寧に計算する計算力を見る問題でもあります。