$\boxed{3}$ $f(x)=x^2-3$とおき　曲線 $y=f(x)$ をCとする。$a_1=3$とし 点 $(a_1,\ f(a_1))$ におけるCの接線と x 軸との交点の x 座標を a_2 とする。次に　点 $(a_2,\ f(a_2))$ におけるCの接線と x 軸との交点の x 座標を a_3 とする。同様に 3以上の自然数 n に対し　点 $(a_n,\ f(a_n))$におけるCの接線と x 軸との交点の x 座標を $a_{n+!}$ とする。

（１） $a_2,\ a_3$ を求めよ。

（２）自然数 n に対して　$a_n>\sqrt{3}$ を示せ。

（３） $a_{n+!}-\alpha=\dfrac{1}{\beta}(a_n-\alpha)+\dfrac{3}{\beta}\left(\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{\alpha}\right)$ $(n=1,\ 2,.\ 3,\ \cdots)$ を満たす

正の実数α，βを求めよ。

（４） $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ の値を求めよ。

解法の糸口

① 点 $(a_n,\ f(a_n))$ における接線の方程式　$y-(a_n{}^2-3)=2a_n(x-a_n)$

より $y=2a_n x-(a_n{}^2+3)$

② $a_{n+1}=\dfrac{a_n{}^2+3}{2a_n}$　　ただし　Cの接線と x 軸との交点が存在する

ためには $a_n\fallingdotseq 0$

③ $a_{n+1}=\sqrt{3}$ と仮定すると $\dfrac{a_n{}^2+3}{2a_n}=\sqrt{3}$ より $a_n{}^2-2\sqrt{3}a_n+3=0$

$(a_n-\sqrt{3})^2=0$　　$a_{n+1}=a_n$となって

題意を満たさない　よって $a_{n+1}\fallingdotseq\sqrt{3}$

④ 曲線C： $y=x^2-3$ は下に凸の放物線

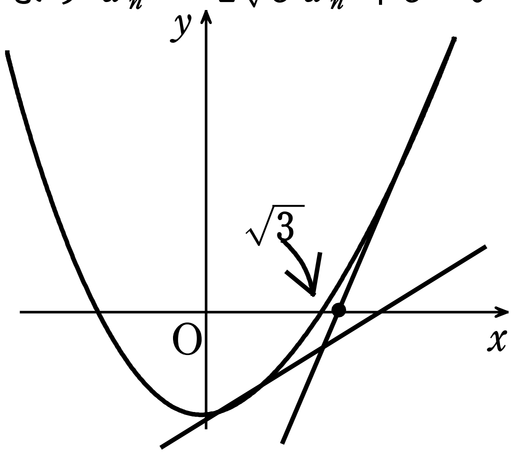
題意を満たす a_{n+1} が連続して存在する

ためには接点の x 座標は $\sqrt{3}$ より大きく

なければいけない。

なぜならば　$a_{n+1}=a$とおく。

ただし $a<\sqrt{3}$ と仮定する



接線存在しない

$\dfrac{a_n{}^2+3}{2a_n}=a$ より $a_n{}^2-2aa_n+3=0$　$a<\sqrt{3}$ と仮定しているから

$\dfrac{判別式}{4}=a^2-3<0$ となって　実数 a_n は存在しない。

また　$a_n\neq\sqrt{3}$ であるから　$a_n>\sqrt{3}$

⑤　$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{3}{2a_n}$

$a_{n+1}-\alpha=\dfrac{1}{\beta}(a_n-\alpha)+\dfrac{3}{\beta}\left(\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{\alpha}\right)$ より $a_{n+1}=$ ・・・

係数比較することで　α，β を決める

⑥　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ の値

おそらく（３）の適用だろう。さしあたって　結果を求めておこう。

題意より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ の極限値が存在するから　この値を γ とおくと極限値

$\gamma=\dfrac{1}{2}\gamma+\dfrac{3}{2\gamma}$ が成り立つ。γ を求める　しかし　これでは正答にはならないですね…

感想

安田グループ　（２）は数学的帰納法で示してあるが　ここでは判別式を適用した。関数と数列　なかなか面白い題材でしたね。有難う…

解答

これまでの詳細な解答を求めたいときは　メルカリにて　徳島大学数学を購入して照してくださることをお願いいたします。