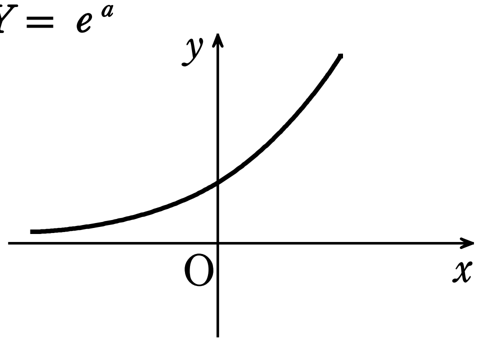
次のア～オのうち誤りがあれば その記号を選び, なければ なし と示しなさい。

**1**　$e$ は無理数で$e=2.71828\cdots$である。 $e$ を底とする対数を自然対数という。自然対数の底 $e$ は省略する。底が省略された対数は自然対数である。 $a$, $b$ は0以上の実数とする。　$\log X+\log Y=a$, $\log(X+Y)=b$ とおく。

ア　$\log X$, $\log Y$ が存在するためには　$X>0$, $Y>0$ である

イ　$\log X+\log Y=\log XY$,　$X+Y=e^b$, $XY=e^a$

ウ　曲線 $y=e^x$の概形を図示すると右図である




エ　$a$, $b$ は0以上の実数であるから
$X+Y\geqq 1$, $XY\geqq 1$

オ　以上より　$X\geqq 1$, $Y\geqq 1$ が成り立つ

**2**　$\dfrac{1}{a_1}=\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{2}{a_n}-3n$, $b_n=\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}$　$(n=1, 2, 3, \cdots)$

と定められた数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$, $\{b_n\}$ がある。

ア　$\dfrac{1}{a_2}=-2$, $\dfrac{1}{a_3}=-10$

イ　$\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=\left(\dfrac{2}{a_n}-3n\right)-\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{a_n}-3n$ より　$b_n=\dfrac{1}{a_n}-3n$
が成り立つ

ウ　$b_{n+1}=\dfrac{1}{a_{n+1}}-3(n+1)$　$b_n=\dfrac{1}{a_n}-3n$　であるから

$$b_{n+1}-b_n=\left\{\frac{1}{a_{n+1}}-3(n+1)\right\}-\left(\frac{1}{a_n}-3n\right)=\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right)-3$$

エ　$b_{n+1}=2b_n-3$ が成り立つ。この二項間の漸化式を変形すると

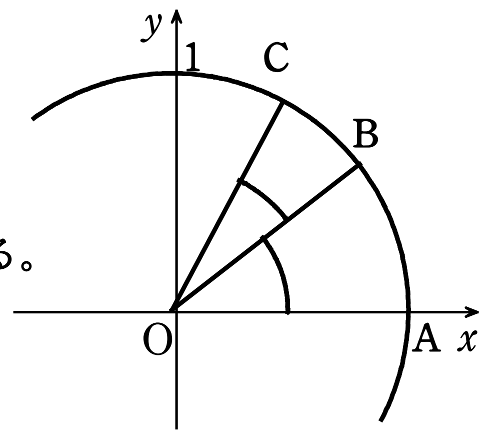
$b_{n+1}-3=2(b_n-3)$ であるから　数列 $\{b_n-3\}$ が等比数列で初項

公比に注意。

$b_n-3=2^n(b_1-3)$　ただし $b_1-3=\left(\dfrac{1}{a_2}-\dfrac{1}{a_1}\right)-3=-\dfrac{11}{2}$

オ　数列 $\{b_n-3\}$ が正しく求めてあれば　$b_n=\dfrac{1}{a_n}-3n$ より

数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ の一般項が求められる




3　座標平面上の原点Oを中心とする単位円の円周上に3点A (1，0), B, Cがこの順番で反時計回りに位置している。

$\angle AOB=\alpha$　$\angle BOC=\beta$　$(\alpha>0, \beta>0)$ とする。

$\alpha=\dfrac{\pi}{4}$, $\beta=\dfrac{\pi}{6}$ のとき

ア　題意を図示すると右図 である

イ　$\cos\angle AOC=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{6}-\sin\dfrac{\pi}{4}\sin\dfrac{\pi}{6}$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

ウ　線分ACの長さ　△OACにおいて余弦定理の適用。$AC^2$ で示す

$$AC^2=OA^2+OC^2-2OA\cdot OC\cos\angle AOC$$

$$=1^2+1^2-2\times1\times1\times\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\frac{4-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$$

$\sqrt{2}\sin\alpha=\cos\alpha$, $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{3}$, $\alpha>0$　$\beta>0$　のとき

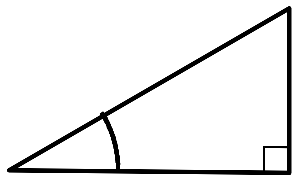
エ　内積　$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}$$
$$=\cos\angle BOC-\cos\angle AOB$$
$$=\cos\beta-\cos\alpha$$

$$=-2\sin\frac{\beta+\alpha}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}=-2\times\frac{1}{2}\sin\frac{\frac{\pi}{3}-2\alpha}{2}$$

$$=\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha-\frac{1}{2}\cos\alpha$$

オ　$\tan\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より $\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$



内積 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{3-\sqrt{6}}{6}$$

$\boxed{4}$　曲線 $y=\dfrac{x^2}{2}-1$ をＣとする。

ア　曲線Ｃ上の点 $\left(t,\ \dfrac{t^2}{2}-1\right)$ $(t\fallingdotseq 0)$ における法線の方程式

$y'=t$ より法線の傾き $-\dfrac{1}{t}$ であるから　法線の方程式

$y-\left(\dfrac{t^2}{2}-1\right)=-\dfrac{1}{t}(x-t)$ より　$y=-\dfrac{x}{t}+\dfrac{t^2}{2}$

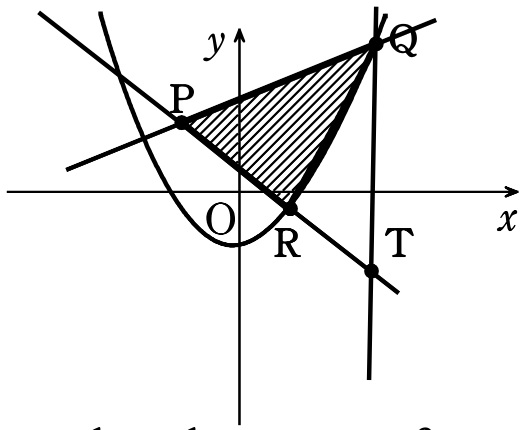
イ　曲線Ｃの法線が点 $\left(-1,\ \dfrac{3}{2}\right)$ を通るとき $\dfrac{3}{2}=-\dfrac{-1}{t}+\dfrac{t^2}{2}$ （$t\fallingdotseq 0$）

$t$ の3次方程式を解く　$t^3-3t+2=0$　因数分解すると

$(t+2)(t-1)^2=0$　$t=-2,\ 1$ (重解) このとき　2本の法線

$t=-2$ のとき　$y=\dfrac{1}{2}x+2$　　$t=1$ のとき　$y=-x+\dfrac{1}{2}$

ウ　曲線Cの $x \geqq 0$
2つの法線で囲まれた図形は右図の斜線部分である




交点の座標P$\left(-1, \frac{3}{2}\right)$　Q$\left(3, \frac{7}{2}\right)$

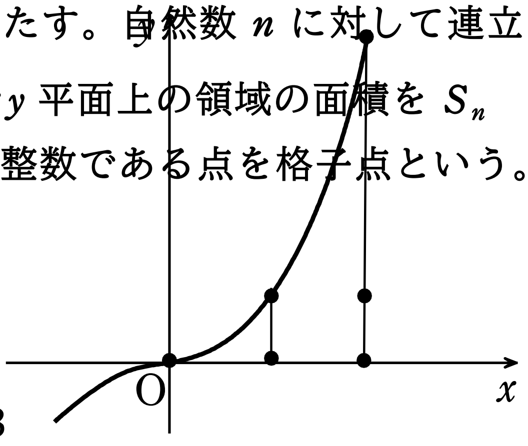
R$\left(1, -\frac{1}{2}\right)$　T$\left(3, -\frac{5}{2}\right)$

エ　定積分　$\int_1^3 \left\{\left(\frac{x^2}{2}-1\right)-\left(-x+\frac{1}{2}\right)\right\}dx=\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}(3-1)^3=\frac{2}{3}$

オ　ウにおける面積の求め方

（三角形PQTの面積）－ $\int_1^3 \left\{\left(\frac{x^2}{2}-1\right)-\left(-x+\frac{1}{2}\right)\right\}dx$

5　関数 $f(x)$ は $x \geqq 0$ のとき $f(x) \geqq 0$ を満たす。自然数 $n$ に対して連立不等式　$0 \leqq x \leqq n$　$0 \leqq y \leqq f(x)$ の表す $xy$ 平面上の領域の面積を $S_n$
その領域に含まれる $x$ 座標と $y$ 座標が共に整数である点を格子点という。
格子点の個数を $L_n$ とおく。




ア　$f(x)=x$　のとき $L_1=2$

イ　$f(x)=x^2$ のとき $L_1=1+(1+1^2)=3$

$f(x)=x^3$のとき

ウ　$L_2=1+(1+1^3)+(1+2^3)$

$=(1+1+1)+(1^3+2^3)=12$

エ　$S_n=\int_0^n x^3dx=\frac{n^4}{4}$

オ　$L_n=\sum_{k=0}^{n}(1+k^3)=(1+n)+\sum_{k=1}^{n}k^3=(1+n)+\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

$=\frac{1}{4}(n+1)(n+2)(n^2-n+2)$