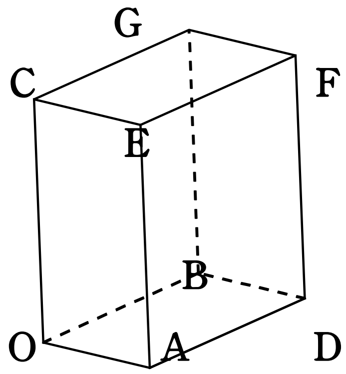


$\boxed{\text{Z 6}}$　指定選択問題　配点40

直方体OADB−CEFGがある。△ABCの重心をSとし　点Pを $3\overrightarrow{SP}=\overrightarrow{OC}+3\overrightarrow{OS}$　で定まる点とする。また　△ABCを含む平面をαとし　直線OPと平面αとの交点をQとする。さらに　$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とし　$|\vec{a}|=\sqrt{3}$ とする。

（１）$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

（２）$\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。また　線分OQが平面αに垂直であるとき　$|\vec{b}|$ と $|\vec{c}|$ の値をそれぞれ求めよ。

（３）3点 C, Q, S は同一直線上にあることを示せ。また　(2) のとき平面α上において点Sを中心として点Cを通る円をKとする。点Rが円K上を動くとき　$|\overrightarrow{OR}|$ の最大値を求めよ。

$\boxed{\text{解答}}$ $\boxed{}$

（１）$3\overrightarrow{SP}=\overrightarrow{OC}+3\overrightarrow{OS}$ より $3(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OS})=\overrightarrow{OC}+3\overrightarrow{OS}$　よって

$\overrightarrow{OP}=\dfrac{\overrightarrow{OC}}{3}+2\overrightarrow{OS}$　△ABCの重心をSより $\overrightarrow{OS}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}$ より

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ を用いて

$$\overrightarrow{OP}=\frac{\vec{c}}{3}+\frac{2}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}+\vec{c}$$

（２）直線OPと平面αとの交点をQとする。$\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OP}$ と表す。

$\overrightarrow{OQ}=\dfrac{k}{3}(2\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c})$　点Qが平面α上にあることから

$\dfrac{1}{3}(2k+2k+3k)=1$　よって　$k=\dfrac{3}{7}$　ゆえに　$\overrightarrow{OQ}=\dfrac{2}{7}\vec{a}+\dfrac{2}{7}\vec{b}+\dfrac{3}{7}\vec{c}$

また　線分OQが平面αに垂直であることは　$\overrightarrow{OQ}$ がα上の交わる2つのベクトル $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ に垂直　すなわち 内積 $\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ かつ $\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

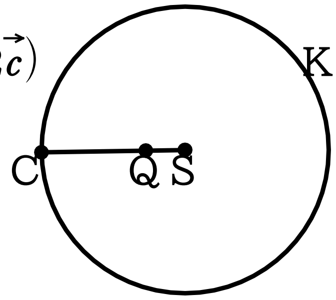
$\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{AB}=0$かつ $\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ より　$\dfrac{1}{7}(2\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$ かつ

$\frac{1}{7}(2\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c})\cdot(\vec{c}-\vec{a})=0$　ここで　$|\vec{a}|=\sqrt{3}$, この立体が直方体 であることから 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=0$　従って　内積計算をして

$2|\vec{b}|^2-6=0$ より $|\vec{b}|=\sqrt{3}$　また　$|\vec{c}|=\sqrt{2}$

（３） 3点 C, Q, S において

平面α上の参考図



$\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{1}{7}(2\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c})-\vec{c}=\frac{2}{7}(\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c})$

$\overrightarrow{\mathrm{CS}}=\overrightarrow{\mathrm{OS}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})-\vec{c}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c})$

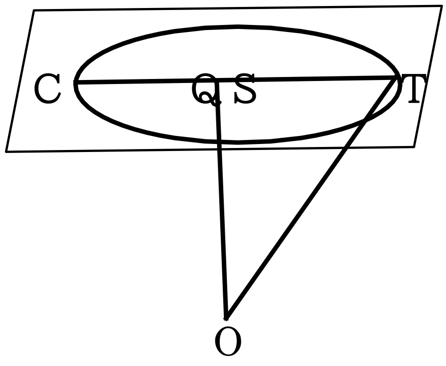
よって　$\overrightarrow{\mathrm{CS}}=\frac{1}{3}\times\frac{7}{2}\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=\frac{7}{6}\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$　従って 3点

C, Q, S はこの順に一直線上にある。

題意より　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ は平面αに垂直　Ｒは円Ｋ上の点

$|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|$ が最大　点Ｒは　…　悩む？

解答を見る　右図　ＲがＴのとき　なるほど…



$QT=QS+ST=\frac{1}{6}CS+CS=\frac{7}{6}C\mathrm{S}$

$=\frac{7}{6}\times\frac{1}{3}\sqrt{3+3+8}=\frac{7}{18}\sqrt{14}$

$OT^2=OQ^2+QT^2=\frac{1}{49}(4\times3+4\times3+9\times2)+\frac{49\times14}{18\times18}=\frac{42}{49}+\frac{49\times7}{18\times9}$

$=\frac{6}{7}+\frac{7^3}{2\times9^2}=\frac{6\times2\times9^2+7^4}{7\times2\times9^2}=\frac{972+2401}{7\times2\times9^2}=\frac{3373}{1134}$

$OT=\sqrt{\frac{3393}{1134}}=1.7\cdots$　　答えが違う！

再度　解答を見る

$OR^2=OQ^2+QR^2$　OR が最大　OQ は一定　$QR=QS+SR$　QS 一定　よって　SRが最大　最大となる R は中心Ｓとする点Ｃを通る円の直径の端点　すなわち　線分ＣＳを２：１ に外分する点である。

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{(-1)\overrightarrow{\mathrm{OC}}+2\overrightarrow{\mathrm{OS}}}{2+(-1)}$

$= -\vec{c} + 2\times\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3} = \dfrac{1}{3}(2\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c})$　ゆえに最大の $|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|$ の長さ

$|\overrightarrow{\mathrm{OR}}| = \dfrac{1}{3}\sqrt{12+12+2} = \dfrac{\sqrt{26}}{3}$　　答えが合う！

ここで　チェックしてみよう。

Ｒは平面α上にあるから　当然　$CR\perp OQ$でなければいけない。

$\overrightarrow{\mathrm{CR}} = \overrightarrow{\mathrm{OR}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \dfrac{1}{3}(2\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}) - \vec{c} = \dfrac{1}{3}(2\vec{a}+2\vec{b}-4\vec{c})$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \dfrac{1}{7}(2\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c})$

内積　$\overrightarrow{\mathrm{CR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \dfrac{1}{21}\{2(\vec{a}+\vec{b}) - 4\vec{c}\}\cdot\{2(\vec{a}+\vec{b})+3\vec{c}\}$

$= \dfrac{1}{21}\{4\times 6\}-12\times 2\} = 0$　確認　チェック終わり