Y問題　100分

数学Ⅰ　数学Ⅱ　数学A　数学B

Y１　必答問題　配点25

空の袋と空の箱がある。袋に対して　次の操作を続けて3回行う。

[操作]
1個のサイコロを1回投げる。1または2の目が出た場合は赤玉を1個袋に入れる。3, 4, 5, 6のいずれかの目が出た場合は　白玉1個を袋に入れる。

操作を続けて3回行った後　袋に入っている3個の玉の色を確認してすべて箱に移す。その後　白玉2個を箱に追加し　箱に入っている玉を合わせて5個にする。ただし赤玉と白玉の個数は十分にあるものとする。

（１）操作を続けて3回行った後に袋に入っていた玉が赤玉3個である確率を求めよ。また　操作を続けて3回行った後に袋に入っていた玉が赤玉2個白玉1個である確率を求めよ。

（２）この箱から2個の玉を同時に取り出すとき　取り出した2個の玉がすべて赤玉である確率を求めよ。

解答

（１）袋に入っていた玉が赤玉3個である確率

サイコロを3回投げて すべて1または2の目が出る確率 $\dfrac{2}{6}\times\dfrac{2}{6}\times\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{27}$

また　袋に入っていた玉が赤玉2個白玉1個である確率

サイコロを3回投げて2回は1または2の目　1回は3, 4, 5, 6のいずれかの目が出る確率　$\dfrac{2}{6}\times\dfrac{2}{6}\times\dfrac{4}{6}\times3=\dfrac{2}{9}$

（２）箱から2個の玉を同時に取り出すとき　取り出した2個の玉がすべて赤玉であるためには　箱の中に赤玉が少なくとも2個は入っていなければならない。赤玉が袋に3個　赤玉が袋に2個の場合が考えられる。

（ｉ）赤玉3個が袋に入り　白玉2個と合わせて5個から2個の玉がすべて赤玉である確率　$\dfrac{1}{27}\times\dfrac{{}_3C_2}{{}_5C_2}=\dfrac{1}{27}\times\dfrac{3}{10}=\dfrac{1}{90}$

（ii） 赤玉2個白玉1個が袋に入り　白玉2個と合わせて5個から2個の玉がすべて

赤玉である確率　$\dfrac{2}{9}\times\dfrac{{}_2C_2}{{}_5C_2}=\dfrac{2}{9}\times\dfrac{1}{10}=\dfrac{2}{90}$

以上（i）（ii）より　$\dfrac{1}{90}+\dfrac{2}{90}=\dfrac{1}{30}$

$\boxed{\text{Y 2}}$　必答問題　配点25

（1） $2^x-2>0$ かつ $8-2^x>0$ を満た実数 x の値の範囲を求めよ。

（2）方程式 $\log_2(2^x-2)+\log_2(8-2^x)=3$ を解け。

$\boxed{\text{解答}}$

（1） $2^x>2$より $x>1$　$8>2^x$ より $3>x$　ゆえに　$1<x<3$

（2）真数条件より $1<x<3$　ここで $2^x=X$ とおく。

ただし $2^1<2^x<2^3$ より $2<X<8$

方程式 $\log_2(X-2)+\log_2(8-X)=3$　従って　$(X-2)(8-X)=2^3$

整理　$X^2-10X+24=0$　$(X-4)(X-6)=0$　条件 $2<X<8$を満たすX

$X=4,\ X=6$　ゆえに $x=2,\ \log_2 6$

$\boxed{\text{Y 3}}$　必答問題　配点50

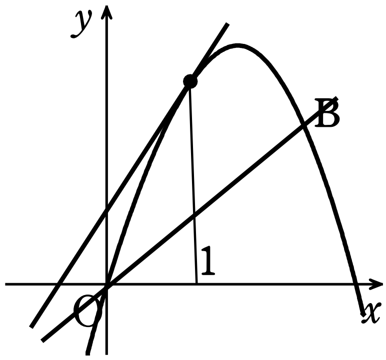
関数 $f(x)=-3x^2+kx$ がありOを原点とする座標平面上において　放物線 C; $y=f(x)$ 上の点 $(1,\ f(1))$ におけるCの接線の傾きは4である。またCの $y>0$ の部分における2点 $A(a,\ f(a)),\ B(b,\ f(b))$（ただし $0<a<b$）をとる。

（1） k の値を求めよ。また　直線OBの方程式を b を用いて表せ。

（2）Cの $0\leqq x\leqq a$ の部分と直線 $x=a$ および x 軸で囲まれた部分を D_1 としその面積を S_1 とする。S_1 を a を用いて表せ。また　Cと直線OBで囲まれた部分を D_2 とし　その面積を S_2とする。S_2 を b を用いて表せ。

（3） (2) において　直線OBが D_1 の面積を二等分するとき b を a を用いて表せ。このとき　さらに直線 $x=a$ が D_2 の面積を二等分するとき b と a の値を求めよ。

解答

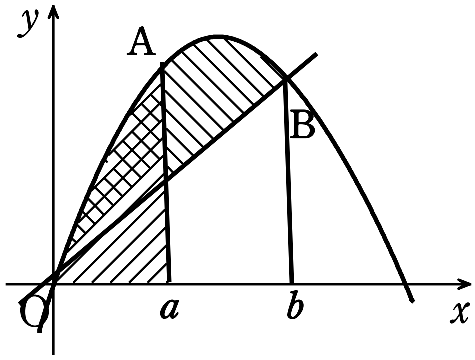


（１） $f'(x)=-6x+k$　点 $A(1,\ f(1))$ における接線の傾き4より $f'(1)=4$　$-6+k=4$ ゆえに　$k=10$

従って　放物線C； $y=-3x^2+10\,x$

原点Oと点Bを結ぶ直線OBの傾き $\dfrac{f(b)}{b}=-3b+10$

直線OBの方程式 $y=(-3b+10)x$



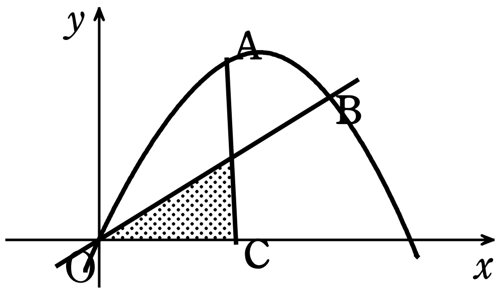
（２）2点 $A(a,\ -3a^2+10a)$，$B(b,\ -3b^2+10b)$

$$S_1=\int_0^a(-3x^2+10x)dx$$

$$=\left[-x^3+5x^2\right]_0^a=-a^3+5a^2$$

$$S_2=\int_0^b\{(-3x^2+10x)-(-3b+10)x\}dx$$

$$=\int_0^b(-3x^2+3bx)dx=\left[-x^3+\frac{3b}{2}x^2\right]_0^b=-b^3+\frac{3b^3}{2}=\frac{1}{2}b^3$$



（３）直線OBが D_1 の面積を二等分する

直線OBと直線 $x=a$ との交点をCとおく。

注意：点Cの y 座標は $\dfrac{f(a)}{2}$ ではないですよ

図形 D_1 は直角三角形ではありません。

辺OCを斜辺とする直角三角形の面積に着目。点Cの y 座標　$(-3b+10)a$

であるから $\dfrac{1}{2}a\times(-3b+10)a=\dfrac{S_1}{2}$　よって　$-3b+10=-a+5$

ゆえに　$b=\dfrac{a+5}{3}$

さらに直線 $x=a$ が D_2 の面積を二等分する　このことは $\dfrac{S_1}{2}\times2=S_2$

すなわち $S_1=S_2$　従って　$-a^3+5a^2=\dfrac{b^3}{2}$　$b=\dfrac{a+5}{3}$ を代入　物凄い

係数計算をして　$0<a<b$ より $a=1,\ b=2$　⟸ ビックリ　スゴイね