$\boxed{\text{Y 4}}$　必答問題　配点50

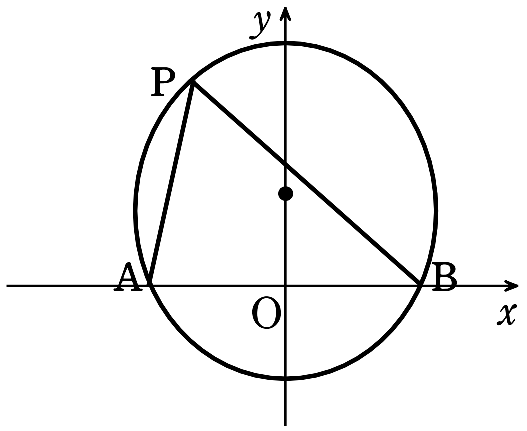
Oを原点とする座標平面上において　点 $(0,\ 1)$ を中心とし半径2である円をCとする。円Cと x 軸の交点をA, Bとする。ただし点Aの x 座標は点Bの x 座標より小さいものとする。また　点Pは円Cの $y>0$ の部分を動くものとする。

（１）点A, Bの座標をそれぞれ求めよ。

（２）AP^2+BP^2の最大値とそのときの点Pの座標を求めよ。

（３）OP^2+BP^2の最大値とそのときの点Pの座標を求めよ。

$\boxed{\text{解答}}$



（１）円C： $x^2+(y-1)^2=4$　　$y=0$ とおく。

$x^2+1=4$　従って $A(-\sqrt{3},\ 0),\ B(\sqrt{3},\ 0)$

（２） $P(x,\ y)$ とおく。

$AP^2+BP^2=(x+\sqrt{3})^2+y^2+(x-\sqrt{3})^2+y^2$

$=2x^2+2y^2+6$

ここで　$x^2=4-(y-1)^2,\ 0<y\leqq 3$　代入

与式$=2\{4-(y^2-2y+1)\}+2y^2+6$

$=4y+12$　　$0<y\leqq 3$ より　$P(0,\ 3)$ のとき 与式の最大値 24

（３） (2) と同様に　$P(x,\ y)$ とおき　$OP^2+BP^2=2x^2+2y^2-2\sqrt{3}x+3$

題意より$y=1+\sqrt{4-x^2}$ を代入

与式$=2x^2+2(1+\sqrt{4-x^2})^2-2\sqrt{3}x+3$

$=2x^2+2(1+2\sqrt{4-x^2}+4-x^2)-2\sqrt{3}x+3$

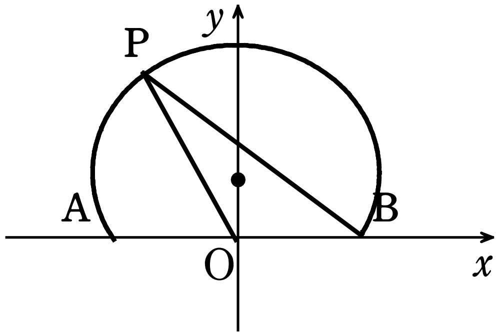
$=4\sqrt{4-x^2}-2\sqrt{3}x+13$　ただし　$-2\leqq x\leqq 2$

与式$=2f(x)$ とおく。数学Ⅲによる解　文系の皆さんは　解法出来ないね！

数学Ⅲ　微分法の応用

$f(x)=2\sqrt{4-x^2}-\sqrt{3}x+\dfrac{13}{2}$　無理関数の導関数　合成関数の導関数

$$(\sqrt{4-x^2})'=\frac{(4-x^2)'}{2\sqrt{4-x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$$



$f'(x) = -\dfrac{2x}{\sqrt{4-x^2}} - \sqrt{3}$

$f'(x) = 0$ のとき　$\sqrt{3}\sqrt{4-x^2} = -2x$

題意より　$-2 \leqq x < 0$ であるから両辺2乗

と同値　$12 - 3x^2 = 4x^2$ よって　$x = -\dfrac{2\sqrt{21}}{7}$

また　$y = 1 + \sqrt{4 - \dfrac{12}{7}} = 1 + \dfrac{4\sqrt{7}}{7} = \dfrac{7 + 4\sqrt{7}}{7}$　このとき　最大値

与式＝ $4\sqrt{4-x^2} - 2\sqrt{3}x + 13$　であるから　与式＝ $2f\left(-\dfrac{2\sqrt{21}}{7}\right)$ より

$$4\sqrt{4-\frac{12}{7}} + 2\sqrt{3} \times \frac{2\sqrt{21}}{7} + 13 = \frac{16\sqrt{7}}{7} + \frac{12\sqrt{7}}{7} + 13 = 4\sqrt{7} + 13$$

別解　媒介変数表示

$x = 2\cos\theta$　$y - 1 = 2\sin\theta$　ただし　$-\dfrac{\pi}{6} < \theta < \dfrac{7\pi}{6}$

$OP^2 + BP^2 = 2x^2 + 2y^2 - 2\sqrt{3}x + 3$　$x = 2\cos\theta$　$y = 1 + 2\sin\theta$ を代入

与式＝ $8\cos^2\theta + 2(1 + 2\sin\theta)^2 - 4\cos\theta + 3$

$= 8\cos^2\theta + 2(1 + 4\sin\theta + 4\sin^2\theta) - 4\cos\theta + 3$

$= 8\cos^2\theta + 2 + 8\sin\theta + 8\sin^2\theta - 4\cos\theta + 3$

$= 8 + 8\sin\theta - 4\cos\theta + 5$

$= 8\left(\sin\theta - \dfrac{1}{2}\cos\theta\right) + 13$　…　合成できない　残念

数学Ⅱ　どのような解なのかな　断念します

$\boxed{\text{Y 5}}$ 指定選択問題　配点50

定数 p に対して　$a_1 = 3,\ a_{n+1} = a_n + pn + 3$　$(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ がある。さらに　$a_3 = 15$ とする。

（1） p の値を求めよ。

（２） a_n を n を用いて表せ。また　$S_n=\sum_{k=1}^{2n}a_k$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ とする。

S_n を n を用いて表せ。

（３）数列 $\{a_n\}$ の最初の6項 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ のうち3の倍数である項は全部で何項あるか。また　数列 $\{a_n\}$ の項のうち3の倍数である項を小さい順に並べてできる数列を $\{b_n\}$ とし　$T_n=\sum_{k=1}^{2n}b_k$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ とする。(2) の S_n に対して $T_n \geqq 2S_n$ を満たす最小の自然数 n を求めよ。

解答

（１） $a_2=a_1+p+3=6+p$，$a_3=a_2+2p+3=(6+p)+2p+3=9+3p$

$a_3=15$ より　$p=2$　ゆえに　$a_{n+1}=a_n+2n+3$

（２）階差数列に着目

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)=3+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+3)$$　ただし $n \geqq 2$　a_1 は特別扱い

従って　$a_n=3+\dfrac{2n(n-1)}{2}+3(n-1)=n^2+2n$　$a_1=3$ を満たす

ゆえに　$a_n=n^2+2n$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

また　$$S_n=\sum_{k=1}^{2n}(k^2+2k)=\frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6}+2\times\frac{2n(2n+1)}{2}$$

$$=\frac{n(2n+1)}{3}(4n+1+6)=\frac{1}{3}n(2n+1)(4n+7)$$

（３）最初の6項　$a_1=3$，$a_2=8$，$a_3=15$，$a_4=24$，$a_5=35$，$a_6=48$

これらのうち3の倍数である項は　$a_1=3$，$a_3=15$，$a_4=24$，$a_6=48$ であるから全部で4項ある。

題意の理解

「数列 $\{a_n\}$ の項のうち3の倍数である項を小さい順に並べてできる数列を $\{b_n\}$とし　$T_n=\sum_{k=1}^{2n}b_k$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ とする。

(2) の S_n に対して $T_n \geqq 2S_n$ を満たす最小の自然数 n を求めよ。」

当然　数列$\{a_n\}$の第$2n$項までの和S_n　この数列$\{a_n\}$の第$2n$項までのうち3の倍数である項の和は$2S_n$よりはるかに小さいはず…　しかし$T_n \geqq 2S_n$を満たす最小の自然数nを求めよ。題意が理解できますね！　そして　最小の自然数nを求めよ。とある。拾い出して解答してみよう。

$n=1$のとき　$S_1=a_1+a_2=11$　$T_1=b_1+b_2=3+15=18$　$2S_1=22$

$n=1$は不適

$n=2$のとき　$S_2=3+8+15+24=50$　$T_2=3+15+24+48=90$

$2S_2=100$　$n=2$は不適

$n=3$のとき　$S_3=\dfrac{1}{3}\times 3\times 7\times 19=133$　$2S_3=266$

$T_3=1\times 3+3\times 5+4\times 6+6\times 8+7\times 9+9\times 11=252$

$n=3$は不適

$n=4$のとき　$S_4=\dfrac{1}{3}\times 4\times 9\times 23=276$　$2S_4=552$

$T_4=T_3+10\times 12+12\times 14=540$　$n=4$は不適

$n=5$のとき　$S_5=\dfrac{1}{3}\times 5\times 11\times 27=445$　$2S_5=990$

$T_5=T_4+13\times 15+15\times 17=990$　$n=5$は適する値