<u>Z問題　120分</u>

数学1　数学Ⅱ　数学Ⅲ　数学A　数学B　数学C

$\boxed{\text{Z 1}}$ 必答問題　配点20

袋の中に $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ の７枚のカードが入っている。この袋の中から同時に3枚のカードを取り出し　取り出したカードに書かれた3つの数字の積をXとする。

（１）Xが偶数である確率を求めよ。

（２）Xが4の倍数である確率を求めよ。また　Xが4の倍数であったときXが8の倍数である条件付き確率を求めよ。

$\boxed{\text{解答}}$

（１）余事象の確率

3枚のカードに書かれた数字の積が奇数となる確率 $\dfrac{{}_4C_3}{{}_7C_3}=\dfrac{4}{\dfrac{7\times6\times5}{3\times2\times1}}=\dfrac{4}{35}$

Xが偶数である確率　$1-\dfrac{4}{35}=\dfrac{31}{35}$

（２） Xが4の倍数である確率

4の倍数となる場合をすべて拾い出す

(1, 2, 4), (1, 2, 6), (1, 3, 4), (1, 4, 5), (1, 4, 6),(1, 4, 7)

(2, 3, 4), (2, 3, 6), (2, 4, 5), (2,4, 6), (2, 4, 7), (2, 5, 6), (2, 6, 7)

(3, 4, 5), (3, 4, 6), (3, 4, 7)

(4, 5, 6), (4, 5, 7), (4, 6, 7)　以上19組　Xが4の倍数である確率　$\dfrac{19}{{}_7C_3}=\dfrac{19}{35}$

また　条件付き確率　$\dfrac{\text{分子}}{\text{分母}}$　　分母＝ $\dfrac{19}{35}$, 分子 ＝$\dfrac{9}{35}$

ゆえに　条件付き確率 $\dfrac{9}{19}$

Z２　必答問題　配点20

対数は自然対数とする。

（１）定積分 $\int_1^e x\log x\,dx$ の値を求めよ。

（２）定積分 $\int_1^e x(\log x)^2 dx$ の値を求めよ。

解答

（１）部分積分法

$$\int_1^e x\log x\,dx = \int_1^e \left(\frac{x^2}{2}\right)'\log x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\log x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}(\log x)'dx$$

$$= \frac{e^2}{2} - \int_1^e \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$$

（２）部分積分法

$$\int_1^e x(\log x)^2 dx = \int_1^e \left(\frac{x^2}{2}\right)'(\log x)^2 dx = \left[\frac{x^2}{2}(\log x)^2\right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{x^2}{2}\right)\{(\log x)^2\}'dx$$

$$= \frac{e^2}{2} - \int_1^e \left(\frac{x^2}{2}\right)\cdot 2(\log x)(\log x)'dx$$

$$= \frac{e^2}{2} - \int_1^e \left(\frac{x^2}{2}\right)\cdot 2(\log x)\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{e^2}{2} - \int_1^e x\log x\,d$$

$$= \frac{e^2}{2} - \left(\frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}$$

Z３　必答問題　配点40

$a_1 = \frac{1}{2},\ a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2^{n+1}}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ によって定まる数列 $\{a_n\}$ がある。

また　$b_n = 2^n a_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ によって定められる数列 $\{b_n\}$ がある。

（１） b_1 の値を求めよ。また　b_{n+1} を b_n を用いて表せ。

（２） b_n を n を用いて表せ。また　$\lim_{n\to\infty} b_n$ を求めよ。

（３）座標平面上に次のように点をとる。

$A_1(b_1,\ a_1),\ A_2(b_2,\ a_2),\ \cdots,\ A_n(b_n,\ a_n),\ A_{n+1}(b_{n+1},\ a_{n+1}),\ \cdots\quad B_1(b_1,\ 0)$
$B_2(b_2,\ 0),\ \cdots,\ B_n(b_n,\ 0),\ \cdots$　$\triangle A_nB_nA_{n+1}$ の面積を S_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

とするとき　無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ の和を求めよ。

解答

（１） $b_1=2a_1=2\times\dfrac{1}{2}=1$　また　$b_n=2^na_n$より　$a_n=\dfrac{b_n}{2^n}$

$a_{n+1}=\dfrac{1}{4}a_n+\dfrac{1}{2^{n+1}}$ に代入　$\dfrac{b_{n+1}}{2^{n+1}}=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{b_n}{2^n}+\dfrac{1}{2^{n+1}}$　両辺に 2^{n+1} を

掛ける　$b_{n+1}=\dfrac{1}{2}b_n+1$

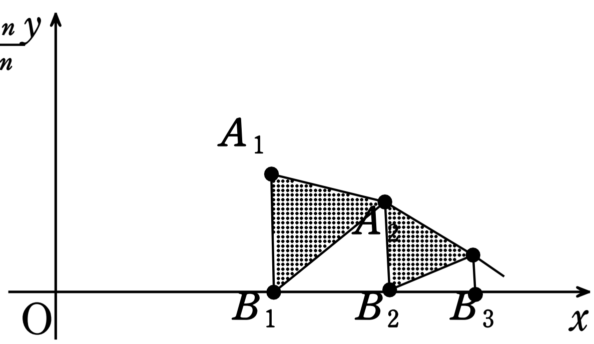
（２）二項間の漸化式　$b_{n+1}=\dfrac{1}{2}b_n+1$ を解く　特性方程式を用いて　変形

$b_{n+1}-2=\dfrac{1}{2}(b_n-2)$　数列 $\{b_n-2\}$ は初項 $b_1-2=-1$, 公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比

数列であるから $b_n-2=(-1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$　よって　$b_n=2-\dfrac{1}{2^{n-1}}$

また　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n=2$

（３） $b_n=2-\dfrac{1}{2^{n-1}}$, $b_n=2^na_n$ より $a_n=\dfrac{b_n}{2^n}$



座標平面上にそれぞれの各点を図示

$A_1\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right),\ \ A_2\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{8}\right),\ A_3\left(\dfrac{7}{4},\ \dfrac{7}{32}\right),\ \cdots$

$B_1,\ B_2,\ B_3,\ \cdots$

そして　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n=2$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=0$

次に　$\triangle A_nB_nA_{n+1}$ の底辺は x 軸に垂直でその長さ a_n　高さは B_nB_{n+1}

$=b_{n+1}-b_n=\left(2-\dfrac{1}{2^n}\right)-\left(2-\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)=\dfrac{1}{2^{n-1}}-\dfrac{1}{2^n}=\dfrac{1}{2^{n-1}}\left(1-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2^n}$

従って　$\triangle A_nB_nA_{n+1}$ の面積

$$S_n=\frac{1}{2}\cdot a_n\cdot\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{b_n}{2^n}\cdot\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^{2n+1}}\left(2-\frac{1}{2^{n-1}}\right)=\frac{1}{2^{2n}}-\frac{1}{2^{3n}}$$

$=\left(\frac{1}{4}\right)^n-\left(\frac{1}{8}\right)^n$　無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty}S_n$ は収束する無限等比級数であって

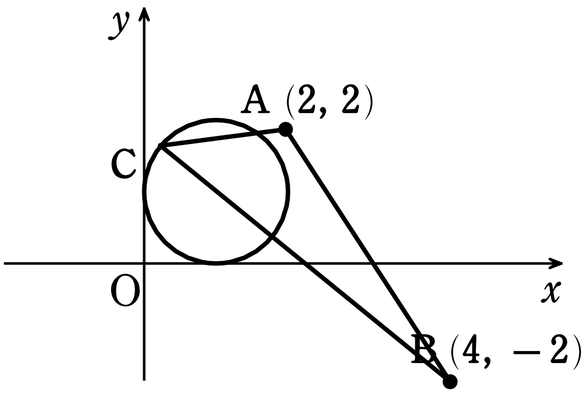
その和$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}\right\}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{8}}$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3}-\frac{1}{8}\cdot\frac{8}{7}=\frac{4}{21}$$

Z４　必答問題　配点40

Oを原点とする座標平面上に2点 $A(2,\ 2)$, $B(4,\ -2)$ があり　線分OAの中点をを中心とする半径1の円をKとする。K上に点Cをとり $P=AB^2+BC^2+CA^2$ とする。点CがK上を動くとき Pがとりうる値の範囲を求めよ。

解答



中心 1，半径1の円K：$(x-1)^2+(y-1)^2=1$

媒介変数表示による解法かな…　やってみよう

$(x-1)^2+(y-1)^2=1$

$\Leftrightarrow x-1=\cos\theta,\ y-1=\sin\theta$

$C(1+\cos\theta\ ,\ 1+\sin\theta)$ ただし $0\leqq\theta<2\pi$

$P=AB^2+BC^2+CA^2$

$=(4-2)^2+(-2-2)^2+(1+\cos\theta-4)^2+(1+\sin\theta+2)^2+(2-1-\cos\theta)^2$

$+(2-1-\sin\theta)^2=4+16+\cos^2\theta-6\cos\theta+9+\sin^2\theta+6\sin\theta$

$+9+1-2\cos\theta+\cos^2\theta+1-2\sin\theta+\sin^2\theta$

$=42+4\sin\theta-8\cos\theta=42+4(\sin\theta-2\cos\theta)=42+4\sqrt{5}\sin(\theta-\alpha)$

ただし $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$，$\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$

従って　与式Pの取り得る値の範囲　$42-4\sqrt{5}\leqq P\leqq42+4\sqrt{5}$