$\boxed{\text{Z 5}}$　必答問題　配点40

p，q は正の実数とする。 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ で定められた関数 $f(x)=\dfrac{p^3}{\sin x}+\dfrac{q^3}{\cos x}$ がある。

（１）導関数 $f'(x)$ を求めよ。

（２）関数 $f(x)$ は極値をただ1つもつことを示せ。また　極値を p，q を用いて表せ。

（３）(2) の極値を m とする。 p， q が $2p^3+q^3=1$ を満たしながら変化するとき m の最大値を求めよ。

$\boxed{\text{解答}}$

（１） $f'(x)=p^3\left(-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)(\sin x)'+q^3\left(-\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)(\cos x)'$

$$=-\frac{p^3\cos x}{\sin^2 x}+\frac{q^3\sin x}{\cos^2 x}=\frac{q^3\sin^3 x-p^3\cos^3 x}{\sin^2 x\cos^2 x}$$

（２） $f'(x)=\dfrac{(q\sin x-p\cos x)(q^2\sin^2 x+qp\sin x\cos x+p^2\cos^2 x)}{\sin^2 x\cos^2 x}$

$q^2\sin^2 x+qp\sin x\cos x+p^2\cos^2 x>0$であるから　$f'(x)=0$ を満たす x の値 $q\sin x-p\cos x=0$　変形 $\tan x-\dfrac{p}{q}=0$ より $\tan x=\dfrac{p}{q}$

p，q は正の実数, $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ であるから　$\tan x=\dfrac{p}{q}$ を満たす x の値はただ1つであり $x=\alpha$とおく。

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$f(x)$		↘	極小	↗	

関数 $f(x)$ は極値（極小値）をただ1つもつことが示された。

極小値 $f(\alpha)=\dfrac{p^3}{\sin\alpha}+\dfrac{q^3}{\cos\alpha}$　　ただし　$q\sin\alpha-p\cos\alpha=0$

$q\sin\alpha-p\cos\alpha=0$ より $\dfrac{p}{\sin\alpha}=\dfrac{q}{\cos\alpha}=k$ とおく。

$f(\alpha)=p^2k+q^2k=k(p^2+q^2)$　また　$\dfrac{p}{\sin\alpha}=\dfrac{q}{\cos\alpha}=k$ より

$\sin\alpha=\dfrac{p}{k}$, $\cos\alpha=\dfrac{q}{k}$　ここで $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ に代入

$\dfrac{p^2}{k^2}+\dfrac{q^2}{k^2}=1$　従って $k^2=p^2+q^2$ より　$k=(p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}$　よって

$f(\alpha)=k(p^2+q^2)=(p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}$

（３） $2p^3+q^3=1$ を満たしながら変化するとき $m=(p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}$ の最大値

$(p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}$ の最大値を与える p, q の値は p^2+q^2 の値を最大にする p. q の値でもある。そこで　$2p^3+q^3=1$ より q を消去して　p の関数 $g(p)$ として　$g(p)$ を最大にする p の値を微分法を用いて求めてみよう。

$q^3=1-2p^3$ より $q^2=(1-2p^3)^{\frac{2}{3}}$,

従って $g(p)=p^2+(1-2p^3)^{\frac{2}{3}}$, ただし　$0<p<\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

微分　$g'(p)=2p+\dfrac{2}{3}(1-2p^3)^{-\frac{1}{3}}(-6p^2)=2p-4p^2(1-2p^3)^{-\frac{1}{3}}$

$g'(p)=0$ のとき　$2p\left(1-\dfrac{2p}{\sqrt[3]{1-2p^3}}\right)=0$　$1-2p^3=8p^3$　$0<p<\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

において $p=\dfrac{1}{\sqrt[3]{10}}$　$p=\dfrac{1}{\sqrt[3]{10}}$ の前後で $g'(p)$ の符号が正から負に変わる

ので $g(p)$ は $p=\dfrac{1}{\sqrt[3]{10}}$ で最大となる。このとき　$q^3=1-2\times\dfrac{1}{10}=\dfrac{8}{10}$

よって　$q=\sqrt[3]{\dfrac{8}{10}}$　従って　m の最大値　$\left\{\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{10}}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{10}}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}$

$=\left\{\dfrac{1}{\sqrt[3]{100}}+\dfrac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{100}}\right\}^{\frac{3}{2}}=\left\{\dfrac{1}{\sqrt[3]{100}}(1+\sqrt[3]{64})\right\}^{\frac{3}{2}}=\dfrac{1}{10}(1+4)^{\frac{3}{2}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$