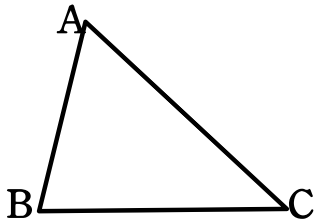
$\boxed{8}$　頂点A, B, Cが反時計回りに位置する三角形ABCがある。初めに点Pは頂点Aにあり　サイコロを1回投げるごとに　1の目が出れば点Pを反時計回りに1つ隣の頂点に移動　6の目が出れば点Pは時計回りに1つ隣の頂点に移動する。1と6以外の目が出れば　点Pは移動しない。
自然数 $n$ に対して　サイコロを $n$ 回投げたときに点Pが頂点A, B, Cにある確率をそれぞれ $a_n$, $b_n$, $c_n$ とする。




ア　サイコロを5回投げた。3の目　2の目　6の目　5の目　6の目が出た。
この結果　点Pは頂点Cにある

イ　$a_1=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$　　$b_1=\dfrac{1}{6}$　　$c_1=\dfrac{1}{6}$

$$a_2=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$$

ウ　$a_n+b_n+c_n=1$　　$b_n=c_n$

エ　$a_{n+1}=\dfrac{2}{3}a_n+\dfrac{1}{6}(b_n+c_n)$

$=\dfrac{2}{3}a_n+\dfrac{1}{6}(1-a_n)$　よって　$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{6}$

変形して　$a_{n+1}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{2}\left(a_n-\dfrac{1}{3}\right)$

数列 $\left\{a_n-\dfrac{1}{3}\right\}$ は初項 $a_1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}$　公比$\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから

$a_n-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$　ゆえに　$a_n=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}+\dfrac{1}{3}$

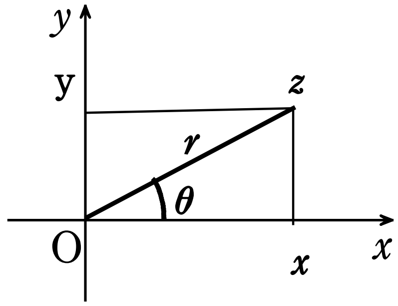
オ　$b_n=c_n=\dfrac{1}{2}(1-a_n)$を用いて $b_n$, $c_n$ を求める

$\boxed{9}$　$x$, $y$ は実数　z を複素数　$i$ を虚数単位とする。

ア　$z=x+yi$

$=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおく。

点 $z$ を複素数平面上に図示　右図




イ　極形式　$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

$z$ の絶対値　$|z|=r$　$(r>0)$　　$z$ の偏角　$arg z=\theta$　$(0\leqq\theta<2\pi)$

ウ　$z=1+2i$ に対して　$\dfrac{z-1}{z+1}$ を極形式で表す

$$\frac{z-1}{z+1}=\frac{2i}{2(1+i)}=\frac{i}{1+i}=\frac{i(1-i)}{1-i^2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$

$r$, $\theta$ を求めるとよい　　$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

エ　$\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right|=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を満たす $z$ をすべて求める

$\sqrt{3}\,|z-1|=|z+1|$　両辺ともに正であるから　両辺 2 乗と同値で

あるから　$3|z-1|^2=|z+1|^2$ よって　$3(z-1)^2=(z+1)^2$が成り立つ。

$2z^2-8z+2=0$より　$z^2-4z+1=0$ の解がすべての $z$ である

オ　$arg\dfrac{z-1}{z+1}=\dfrac{\pi}{6}$ を満たす $z$ について考える。

$\dfrac{z-1}{z+1}=r\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$　ここで　$z=x+yi\ (y>0)$ とおく。

左辺$=\dfrac{z-1}{z+1}=\dfrac{(x-1)+yi}{(x+1)+yi}=\dfrac{\{(x-1)+yi\}\{(x+1)-yi\}}{(x+1)^2-y^2i^2}$

$=\dfrac{1}{(x+1)^2+y^2}\{(x^2+y^2-1)+2yi\}$

右辺$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}r+\dfrac{1}{2}ri$　実部　虚部を比較して

$$\frac{x^2+y^2-1}{(x+1)^2+y^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}r \qquad \frac{2y}{(x+1)^2+y^2}=\frac{1}{2}r$$ この2式から辺々割算をして　$r$ を消去する。$x$, $y$ の関係式を得る

$\boxed{10}$　$x>0$ とする。関数　$f(x)=e^{-x}\sin x$ , $g(x)=e^{-x}\cos x$

曲線　$C_1$: $y=|f(x)|$,　$C_2$: $y=|g(x)|$

$|f(x)|=|g(x)|$ を満たす正の実数解を小さい順に $a_1$, $a_2$, $a_3$ …とする。

ア　$f'(x)=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x=-e^{-x}(\sin x-\cos x)$

$g'(x)=-e^{-x}\cos x-e^{-x}\sin x=-e^{-x}(\cos x+\sin x)$

イ　$f'(x)+g'(x)=-2e^{-x}\sin x=-2f(x)$

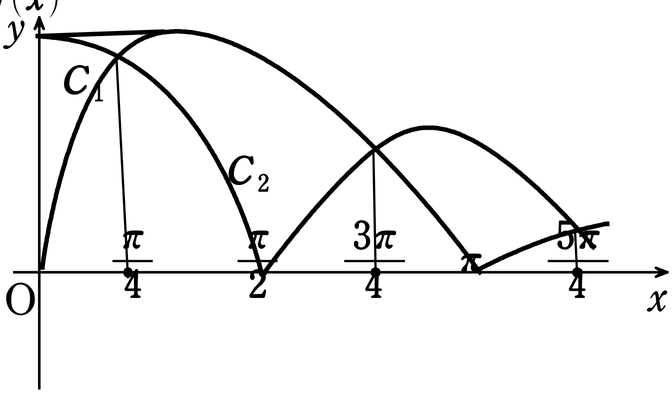
より $f(x)=-\dfrac{1}{2}\{f'(x)+g'(x)\}$

$f'(x)-g'(x)=2e^{-x}\cos x=2g(x)$

より $g(x)=\dfrac{1}{2}\{f'(x)-g'(x)\}$

従って　$f(x)+g(x)=-g'(x)$

$f(x)-g(x)=-f'(x)$




ウ　$C_1, C_2$ の概形　右図

$e^{-x}>0$ より $|\sin x|=|\cos x|$ を満たす正の実数解

$a_1=\dfrac{\pi}{4}$, $a_2=\dfrac{3\pi}{4}$, $a_3=\dfrac{5\pi}{4}$

エ　$C_1$ と $C_2$ で　はじめて囲まれた図形の面積

$$S_1=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\{f(x)-g(x)\}dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}\{f(x)+g(x)\}dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \{-f'(x)\}\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \{-g'(x)\}dx = -[f(x)]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - [g(x)]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}$$

$$= -f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{4}\right) - g\left(\frac{3\pi}{4}\right) + g\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= -e^{-\frac{\pi}{2}} \times 1 + e^{-\frac{\pi}{4}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} - e^{-\frac{3\pi}{4}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\pi}{4}} - e^{-\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{3\pi}{4}}$$

オ　$C_1$ と $C_2$ で　2番目に囲まれた図形の面積 $S_2$ を求めてみよう。

$$S_2 = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \{-g(x) - f(x)\}dx + \int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} \{-g(x) + f(x)\}dx$$

$$= -\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \{f(x) + g(x)\}dx + \int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} \{f(x) - g(x)\}dx$$

$$= -\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \{-g'(x)\}dx + \int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} \{-f'(x)\}dx$$

$$= \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} g'(x)dx - \int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} f'(x)dx$$

$$= [g(x)]_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} - [f(x)]_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}}$$

$$= g(\pi) - g\left(\frac{3\pi}{4}\right) - f\left(\frac{5\pi}{4}\right) + f(\pi)$$

$$= -e^{-\pi} + \frac{e^{-\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}} + \frac{e^{-\frac{5\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$$

ここで　$S_2$ と $S_1$ の関係について考えてみよう。

$\pi=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2},\ \frac{5\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{2}$ であるから　$S_2$ において

$e^{-\frac{\pi}{2}}$ でくくると　$S_2=e^{-\frac{\pi}{2}}\left(-e^{-\frac{\pi}{2}}+\frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}+\frac{e^{-\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\right)=e^{-\frac{\pi}{2}}S_1$

$\boxed{答え}$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\boxed{1}$ | なし | $\boxed{2}$ | なし | $\boxed{3}$ | ウ |
| $\boxed{4}$ | オ | $\boxed{5}$ | イ | $\boxed{6}$ | ウ |
| $\boxed{7}$ | オ | $\boxed{8}$ | ア | $\boxed{9}$ | エ |
| $\boxed{10}$ | ウ | | | | |