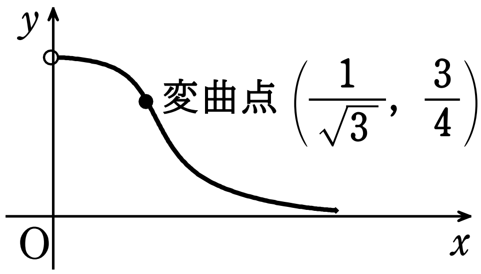
$\boxed{4}$ 関数　$f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$，原点Oとする座標平面上に曲線C: $y=f(x)$　$(x>0)$
C上の点 $(t,\ f(t))$ を通り　傾き $f'(t)$ である直線を l とする。

ア　$f'(x)=\dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$

イ　$f''(x)=\dfrac{-2(x^2+1)^2-(-2x)\,2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}$

$$=\frac{-2(x^2+1)}{(x^2+1)^4}\{(x^2+1)-4x^2\}$$

$$=\frac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$$

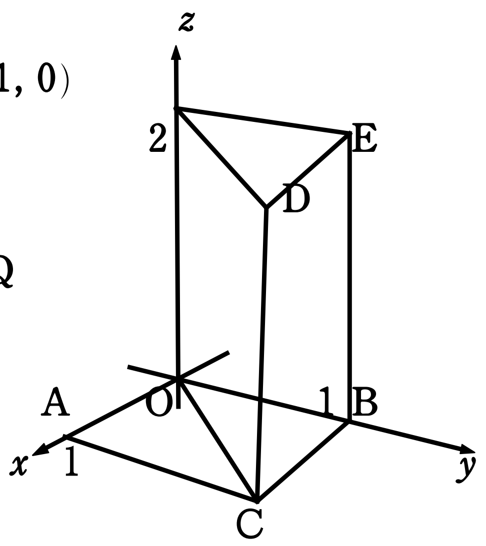


ウ　C の概形　右図

エ　l の方程式　$y-f(t)=f'(t)(x-t)$ より　$y=f'(t)x+f(t)-tf'(t)$

$f'(t)=-\dfrac{2t}{(t^2+1)^2}$，$f(t)-tf'(t)=\dfrac{1}{t^2+1}+\dfrac{2t^2}{(t^2+1)^2}=\dfrac{3t^2+1}{(t^2+1)^2}$

オ　変曲点を通る直線 l はCの接線ではなくて　曲線Cの割線という



$\boxed{5}$ 座標空間内に　原点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$

$C(1, 1, 0)$, $D(1, 1, 2)$, $E(0, 1, 2)$がある。

線分ＯＡを 3：1 に内分する点をＰ　線分BE上で

$\overrightarrow{\mathrm{BQ}} = s(0, 0, 1)$ $(0 \leqq s \leqq 2)$ となる点をＱ　線分PQ

上で $\overrightarrow{\mathrm{PR}} = t\,\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ $(0 < t \leqq 1)$ となる点をＲ　直線

ＯＲと平面BCEとの交点をSとおく。

ア　題意を満たす原点O, A, B, C, D, Eは

右図

イ　xy 平面上にある正方形ＯＡCBの周または内部にある点 (x, y, z) が

満たす条件は $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$ である

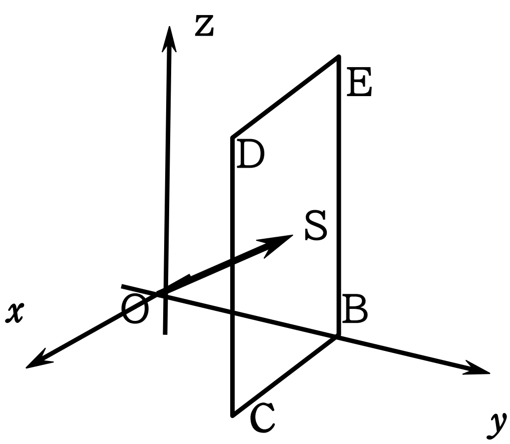
ウ　条件 $x \geqq 0$, $y \leqq 1$, $x - y \leqq 0$, $0 \leqq z \leqq 2$ が満たす立体の体積は 1 である

エ　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を s, t を用いて表したい。

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{BQ}} - \overrightarrow{\mathrm{BP}} = s(0, 0, 1) - \left\{\left(\frac{3}{4}, 0, 0\right) - (0, 1, 0)\right\}$$

$$= \left(-\frac{3}{4},\ 1,\ s\right) \qquad \overrightarrow{\mathrm{OR}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{PR}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + t\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$$

これによって $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を s, t を用いて表す



オ　$\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ を s, t を用いて表したい

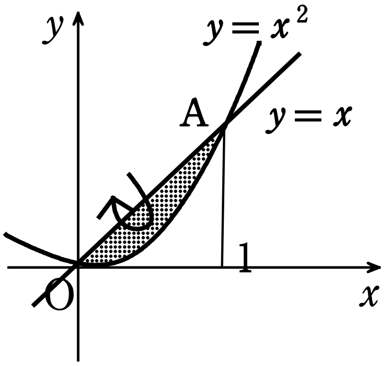
$$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = r\,\overrightarrow{\mathrm{OR}} = r\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{PR}}\right)$$

$$= r\left\{\left(\frac{3}{4}, 0, 0\right) + t\left(-\frac{3}{4}, 1,\ s\right)\right\}$$

$$= r\left\{\left(\frac{3}{4}(1-t),\ t,\ st\right)\right\}$$

ここでRが平面BCE上　すなわち　平面 $y=1$ 上にあることに着目

よって　$rt = 1$より $r = \dfrac{1}{t}$ これによって $\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ を s, t を用いて表す



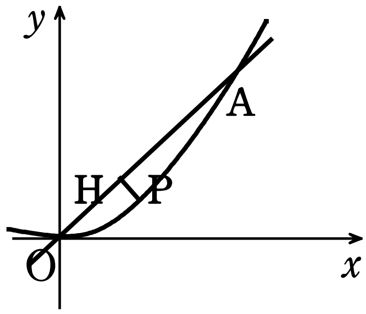
$\boxed{6}$ 放物線 $y=x^2$ と直線 $y=x$ で囲まれた部分を直線 $y=x$ の周りに1回転してできる立体の体積V$=\dfrac{\sqrt{2}}{60}\pi$

（数研教科書　数学Ⅲ）

放物線と直線の交点O，A　弧OA上の点 $P(x,\ y)$ から直線 $x-y=0$ に下した垂線PHの長さ r とおく。

ア　題意を図示　右図

イ　$r=\dfrac{|x-x^2|}{\sqrt{2}}=\dfrac{x-x^2}{\sqrt{2}}$



ウ　求め方１　$V=\pi\displaystyle\int_0^1 r^2dx$　ただし　$r=\dfrac{x-x^2}{\sqrt{2}}$

エ　求め方2　$V=\pi\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} r^2dt$　ただし　OH$=t$，$r=\dfrac{x-x^2}{\sqrt{2}}$，$\sqrt{2}=OA$，

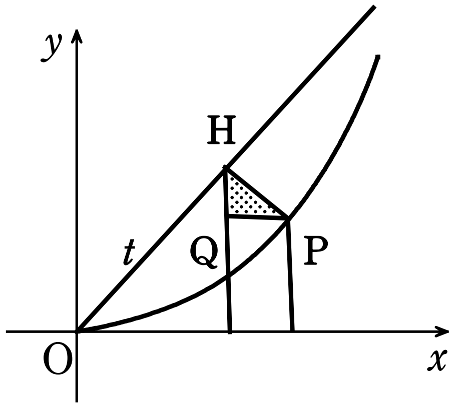
オ　求め方2　$V=\dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}}(x-x^2)^2dt$

ただし　OH$=t$

t を x で表したい　dt を dx で表したい。

右図　直角二等辺三角形PQHを考える。

置換積分することによってV$=\dfrac{\sqrt{2}}{60}\pi$ を導く



$\boxed{7}$ 12個の自然数　$1, 2, 3, \cdots, 12$　から異なる３個の自然数を選ぶ。この３数を a, b, c $(1 \leqq a < b < c \leqq 12)$ とおく。
このとき　$p = b - a$, $q = c - b$ とおいて　$p \geqq q$ ならば $(a, b, c) = p$　$p < q$ ならば $(a, b, c) = q$ と決める。$(a, b, c) = k$ となる3つの整数 a, b, c の選び方の総数を $S(k)$とする。

ア　$a = 1, b = 5, c = 8$ のとき $p = 5 - 1 = 4, q = 8 - 5 = 3$ より　$(a, b, c) = 4$
　　また　$a = 6, b = 8, c = 12$ のとき　$k = 4$

イ　$k = 1, 2, 3, \cdots, 10$ のいずれかである

ウ　$(a, b, c) = 1$ となる3つの整数 a, b, c の選び方の総数　(a, b, c)
　$= (1, 2, 3), (2, 3, 4), (3, 4, 5) \cdots (10, 11, 12)$ より　$S(1) = 10$

エ　$(a, b, c) = 2$ となる3つの整数 a, b, c の選び方
　$p = 2$ の場合 $(1, 3, 4), (1, 3, 5), (2, 4, 5), (2, 4, 6), (3, 5. 6) \cdots (9, 11. 12)$
　$q = 2$ の場合 $(1, 2, 4), (2, 3, 5), (3, 4, 6), (4, 5, 7), (5, 6, 8), (6, 7, 9)$
　$(7, 8, 10), (8, 9, 11), (9, 10, 12)$
　従って　$S(2)$の値が求まる

オ　$S(k)$ の最大値 $S(6)$