後期日程

理工学部

1　頂点A, B, Cが反時計回りに位置する三角形ABCを考える。
初めに点Pは頂点Aにある。サイコロを1回投げるごとに　1の目が出れば点Pは反時計回りに1つ隣の頂点に移動し　6の目が出れば点Pは時計回りに1つ隣の頂点に移動し　1と6以外の目が出れば点Pは移動しない。
自然数 n に対し　サイコロを n 回投げたときに点Pが頂点A, B, Cにある確率をそれぞれ a_n, b_n, c_n とする。

（1） a_1, a_2 を求めよ。

（2） a_{n+1} を a_n を用いて表せ。

（3） $a_n, b_n,\ c_n$ を n を用いて表せ。

2　i を虚数単位とする。

（1） $z=1+2i$ に対し　$\dfrac{z-1}{z+1}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$　$(r>0,\ -\pi<\theta<\pi)$
を満たす実数 r およびθを求めよ。

（2） $|z|=1$ かつ $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right|=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を満たす複素数 z をすべて求めよ。

（3）実数 x, 正の実数 y に対し　複素数 $z=x+yi$ を考える。
$arg\,\dfrac{z-1}{z+1}=\dfrac{\pi}{6}$ を満たす点 z全体の集合 を複素数平面上に図示せよ。

3　$f(x)=e^{-x}\sin x$, $g(x)=e^{-x}\cos x$ とする。座標平面上の2つの曲線
C_1: $y=|f(x)|$, C_2: $y=|g(x)|$ を考える。$|f(x)|=|g(x)|$ を満たす正の実数 xの値を小さい順に $a_1, a_2, a_3\cdots$とする。

（1） $f'(x)+g'(x)$ および $f'(x)-g'(x)$ を求めよ。

（2） $a=1, 2, 3, \cdots$ に対し　a_n を求めよ。

（3）$a=1, 2, 3, \cdots$ に対し　$a_n \leqq x \leqq a_{n+1}$ の範囲において2つの曲線 C_1, C_2 で囲まれた部分の面積を S_n とする。

S_1 および $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} S_k$ の値を求めよ。

答え

前期日程

1　（1）内積　t^2-2t　（2）最小値 $\dfrac{\sqrt{35}}{2}$ $(t=1$のとき$)$

（3）$t=\dfrac{2\pm\sqrt{19}}{3}$

2　（1）$t=0, 1, 2, -3$　（2）$a=-2, b=0, c=2, d=-3$

（3）$t=\pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}$，$\dfrac{3}{4}$　最小値 $\dfrac{15}{16}$ $\left(t=\dfrac{3}{4}\text{のとき}\right)$

3　（1）$\dfrac{1}{128}$ は第22項　$\dfrac{1}{512}$ は第 47 項　（2）$\dfrac{1}{2}$

（3）和　$2k-1+\dfrac{3}{2^{2k+1}}$

4　（1）接線　$y=-\dfrac{2t}{(t^2+1)^2}x+\dfrac{3t^2+1}{(t^2+1)^2}$　（2）$S=\dfrac{(3t^2+1)^2}{4t(t^2+1)^2}$

（3）最小値 $S\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{9\sqrt{3}}{16}$

5　（1）$\overrightarrow{OR}=\left(\dfrac{3(1-t)}{4}, t, st\right)$, $\overrightarrow{OS}=\left(\dfrac{3(1-t)}{4t}, 1, s\right)$

（2）$0\leqq s\leqq 2$，$\dfrac{3}{7}\leqq t\leqq 1$　（3）面積　$\dfrac{50}{49}$

6　（1）t＝ 0, 1, 2, -3　（2） $a=-2, b=0, c=2, d=-3$

（3）最小値 $f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{15}{16}$

7　（1）最大値 $f\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)=1+\sqrt{2}$　最小値 $f(0)=0$

（2） $r=\frac{\sqrt{2x-x^2}}{\sqrt{2}}$, $t=\frac{2x+\sqrt{2x-x^2}}{\sqrt{2}}$

（3）体積 $\frac{5\sqrt{2}}{12}$

8　（1） $S(2)=8$, $S(3)=6$　（2） $S(k)=(2n-k)(2n-k-1)$

（3） $S(k)=-3k^2+(4n+1)k-2n$

（4）M＝ $\frac{4}{3}n(n-1)$ （ $k=\frac{2}{3}n$ のとき ）

後期日程

1　（1） $a_1=\frac{2}{3}$, $a_2=\frac{1}{2}$　（2） $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{6}$

（3） $a_n=\frac{1}{3}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$　$b_n=c_n=\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right\}$

2　（1） $r=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\theta=\frac{\pi}{4}$　（2） $z=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$

（3）複素数平面上の点 $z=x+yi$ において　円の一部

$x^2+(y-\sqrt{3})^2=4$　ただし　$y>0$　（図示は省略）

3　（1） $f'(x)+g'(x)=-2e^{-x}\sin x$, $f'(x)-g'(x)=2e^{-x}\cos x$

（2） $a_n=-\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2}$

（3）　$S_1=\dfrac{e^{-\frac{\pi}{4}}-\sqrt{2}\,e^{-\frac{\pi}{2}}+e^{-\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$

極限値　$\dfrac{S_1}{1-e^{-\frac{\pi}{2}}}=\dfrac{e^{-\frac{\pi}{4}}+e^{\frac{\pi}{4}}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}}-1\right)}$