$\boxed{1}$　t を実数とする。

原点をOとする座標空間内に3点 $A(1,\ -t,0)$, $B(t+1,\ -t-1,2\ )$
$C(t-1,\ -t-2,\ -1)$ をとる。

（１）内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ を t を用いて表せ。

（２） t が実数全体を動くとき　三角形ABCの面積の最小値を求めよ。

（３）4点O, A, B, Cが同一平面上にあるときの t をすべて求めよ。

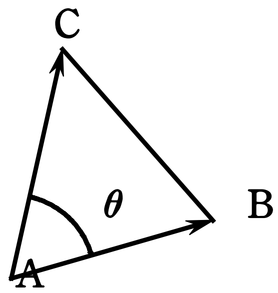
$\boxed{\text{解法の糸口}}$

①　$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(t+1,\ -t-1,2)-(1,\ -t,\ 0)$

　　$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(t-1,\ -t-2,\ -1)-(1,\ -t,\ 0)$

②　内積　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=t(t-2)+(-1)(-2)+2(-1)$

③　三角形ABCの面積S



$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\theta$$

ただし θ は $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ のなす角　$0<\theta<\pi$　　x

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{AC}|\cos\theta$ より

$$1-\cos^2\theta=1-\left(\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}\right)^2=\frac{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2}$$

従って　$S=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\times\dfrac{\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$$

④　4点O, A, B, Cが同一平面上にあるための条件

　$\overrightarrow{OC}=k\overrightarrow{OA}+l\overrightarrow{OC}$ を満たす実数 k,l が存在する

$\boxed{\text{解答}}$

詳細な解答は徳島大学の数学メルカリを購入して参照してください

感想

新課程　数学C　空間ベクトル　基本題　教科書レベル。受験生に優しい出題となっています。三角形の面積公式　さらに　その公式導入も含めて理解しておきたいですね。第1問　感謝！ありがとう！

2　t を実数とする。

x の2次方程式 $x^2-(2t^2-3)x+t^4-7t^2+6t=0$ ….（＊）がある。

（１）$x=0$ が(∗)の解となる t の値をすべて求めよ。

（２）a, b, c, d を実数とする。すべての実数 t について $x=t^2+at+b$ および $x=t^2+ct+d$ が(∗)の解となる a, b, c, d の値を求めよ。
ただし　$b>d$ とする。

（３）(2)の a, b, c, d に対し　$\alpha(t)=t^2+at+b, \beta(t)=t^2+ct+d$ とする。
$|\alpha(t)|=|\beta(t)|$ となる t をすべて求めよ。また　それらの t に対する $|\alpha(t)|$ の最小値を求めよ。

解法の糸口

①　$x=0$ が(∗)の解となる t の値

$t^4-7t^2+6t=0$を満たす t の値　　左辺＝ $t(t-1)(t-2)(t+3)$

②　$x=t^2+at+b$ および $x=t^2+ct+d$ が x の2次方程式(∗)の解となる a, b, c, d の値

解と係数の関係　$\begin{cases}(t^2+at+b)+(t^2+ct+d)=2t^2-3\\(t^2+at+b)\times(t^2+ct+d)=t(t-1)(t-2)(t+3)\end{cases}$

ただし　これら2式はすべての実数 t について成り立つ。

特に　$(t^2+at+b)\times(t^2+ct+d)=t(t-1)(t-2)(t+3)$，$b>d$ に着目して　a, b, c, d の値を決める

③　(2)で決まった a, b, c, d に対して　2つの曲線　$y=|\alpha(t)|$，$y=|\beta(t)|$ を同一平面上に図示　これらの交点 (t, y) の t 座標が t の値　それらのt の値に対して $|\alpha(t)|$の値の最小値を求める

$\boxed{\text{解答}}$

詳細な解答はメルカリを講習して参照してください

$\boxed{\text{感想}}$

$\alpha(t)=t^2+at+b$, $\beta(t)=t^2+ct+d$ が x の2次方程式の解　解と係数の関係から a, b, c, d の値を決める。この決め方　この解法がこの問題のキーとなっています。

(2)で決まった関数 $\alpha(t)$, $\beta(t)$ を横軸 t 軸　縦軸 y 軸として t, y 座標平面上に　曲線 C_1: $y=|\alpha(t)|$, C_2: $y=|\beta(t)|$ の概形を描く。

C_1, C_2 の交点の t 座標をすべて求めて　これらの t に対して $|\alpha(t)|$ の最小値　これが　本題。

最終題（$-\dfrac{3}{2}+\sqrt{6}$）と $\dfrac{15}{16}$ の大小比較には　参った！

2次関数と2次方程式　数学Ⅰ　受験生にとって取り組みやすい標準題となったね。感謝！