$\boxed{3}$ 数列

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{2}{8},\ \frac{4}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{2}{16},\ \frac{4}{16},\ \frac{8}{16},\ \frac{1}{32},\ \frac{2}{32},\ \frac{4}{32},\ \cdots\cdots$$

の規則性を推測し　次の問いに答えよ。

（１）数列の各項を既約分数で表す。このとき　最初に現れる $\frac{1}{128}$ は第何項か。

また　2回目に現れる $\frac{1}{512}$ は第何項か。

（２）第300項を求めよ。　ただし　既約分数で表せ。

（３）k を自然数とする。$n=2k^2+k+1$ のとき　初項から第 n 項までの和を k を用いて表せ。

$\boxed{\text{解法の糸口}}$

① 群数列の設定

$$\frac{1}{2}\ \Big|\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{4}\ \Big|\ \frac{1}{8},\ \frac{2}{8},\ \frac{4}{8}\ \Big|\ \frac{1}{16},\ \frac{2}{16},\ \frac{4}{16},\ \frac{8}{16}\ \Big|\ \frac{1}{32},\ \frac{2}{32},\ \frac{4}{32},\ \cdots\cdots$$

② 第 k 群

$$\cdots\ \Big|\ \frac{1}{2^k},\ \frac{2}{2^k},\ \frac{2^2}{2^k},\ \frac{2^3}{2^k},\ \cdots,\ \frac{2^{k-1}}{2^k}\ \Big|\ \cdots$$

分母　2^k　分子　$1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3,\ \cdots,\ 2^{k-1}$

第 k 群にある項数は　分子に着目。2^k 個ではなくて 2 の累乗の指数に着目して　第 k 群の項数は k 個（注意）

③ 最初に現れる $\frac{1}{128}$ は第何項

$128=2^7$ より $\frac{1}{128}$ は第7群の初項　よって　第6群の末項までの項数を求めるとよい

④ 2回目に現れる $\frac{1}{512}$ は第何項

$512=2^9$ より $\frac{1}{512}=\frac{1}{2^9}=\frac{2}{2^{10}}$　2回目に現れる $\frac{1}{512}$ は第10群の2番目

の項

⑤　第300項を既約分数で表す

第300項が第 k 群に属しているとする。第 $(k-1)$ 群の末項までの項数と第 k 群の末項までの項数を用いて

不等式　$\dfrac{(k-1)k}{2}<300\leqq\dfrac{k(k+1)}{2}$ より $(k-1)k<600\leqq k(k+1)$

連続2 整数の積　$24\times25=600$　よって　第300項は第 24 群の末項

⑥　（３）題意が理解できない。

$n=2k^2+k+1=\dfrac{2k(2k+1)}{2}+1$ がヒント

解答

詳細な解答は　メルカリから購入した徳島大学の数学を参照してください

感想

（３）題意の理解に悩んだ。受験生は捨て問かな。時間が十分あればぜひとも挑戦してほしい。よく考えさせられるすばらしい問題ですね。

4　$f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ とする。原点をOとする座標平面上の曲線 $y=f(x)\ (x>0)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線を l とし　l と x 軸との交点をP，l と y 軸との交点をQとする。また　三角形OPQの面積をSとする。

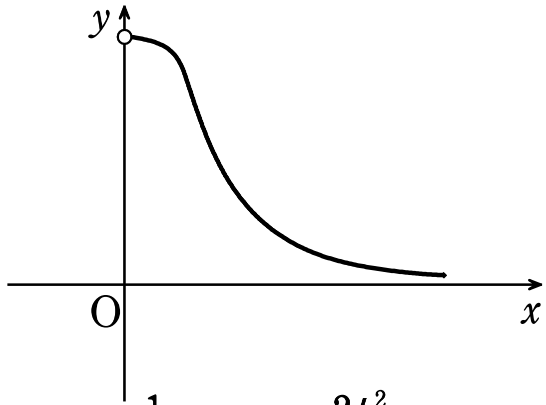
（１）接線lの方程式を求めよ。

（２）Sを t を用いて表せ。

（３）t が $0<t<1$ の範囲を動くとき　Sの最小値を求めよ。

解法の糸口

① 曲線　$y=\dfrac{1}{x^2+1}$ $(x>0)$ の概形



② $f'(x)=\dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$ より　点 $(t,\ f(t))$ を通り

傾き $f'(t)$ の直線 l の方程式

$y-f(t)=f'(t)(x-t)$ より

$l：y=f'(t)x+f(t)-tf'(t)$

ただし　$f'(t)=-\dfrac{2t}{(t^2+1)^2}$　　$f(t)-tf'(t)=\dfrac{1}{t^2+1}+\dfrac{2t^2}{(t^2+1)^2}$

$$=\frac{3t^2+1}{(t^2+1)^2}$$

③ $f''(x)=-2\left(\dfrac{x}{(x^2+1)^2}\right)'=-\dfrac{2}{(x^2+1)^4}\{(x^2+1)^2-x\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x\}$

$$=-\frac{2}{(x^2+1)^3}\{(x^2+1)-4x^2\}=-\frac{2(-3x^2+1)}{(x^2+1)^3}$$

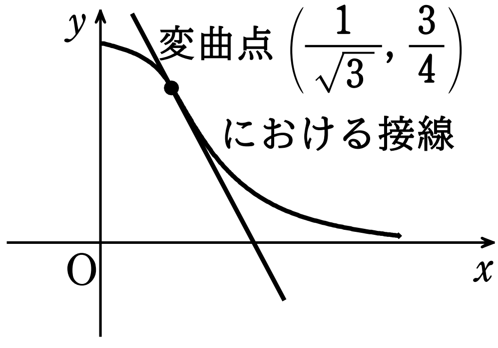
$$=\frac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$$

④ 曲線 $y=\dfrac{1}{x^2+1}$ $(x>0)$ の変曲点の座標　$\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{3}{4}\right)$

⑤ 曲線 $y=\dfrac{1}{x^2+1}$ $(x>0)$ 上の点 $(t,\ f(t))$

傾き $f'(t)$ の直線 l は　すべて曲線の接線である。

接線の定義から　変曲点における l もまた曲線の接線である



⑥ 原点O，l と x 軸，y 軸との交点をそれぞれ $P,\ Q$　三角形OPQの面積をＳとする。P, Qの x 座標，y 座標をそれぞれ求めてＳを t の関数として関数設定。微分　増減表　Sの最小を考える。変曲点を通る l がＳを最小にするを意識しながら　Ｓの最小値を求める　…

解答

詳細な解答はメルカリから徳島大学の数学を購入して参照してください

感想

典型的な数学Ⅲ問題と判断。三角形ＯＰＱの面積までは容易に求まった。
指数関数　分数関数の微分法　参った。受験生　ここは捨て問だね。
数式変形の工夫が厳しく問われました。見事な問題！
安田　亨グループの解法を見た。
対数微分法　これには気づかなかったね。