$\boxed{5}$　座標空間内の点O(0, 0, 0), A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(1, 1, 0), D(1, 1, 2) E(0, 1, 2)を考える。線分OAを 3:1 に内分する点をP,　線分BE上で $\overrightarrow{BQ} = s(0, 0, 1)$ $(0 \leqq s \leqq 2)$ となる点をQ, 線分PQ上で $\overrightarrow{PR} = t\overrightarrow{PQ}$ $(0 < t \leqq 1)$ となる点R, 直線ORと平面BCEとの交点をSとおく。

（１） $\overrightarrow{OR}$ および $\overrightarrow{OS}$ を s, t を用いて表せ。

（２）点Sが平面BCE上の四角形BCDE上の周または内部にあるための s, t の条件を求めよ。

（３） s, t が(2)の条件を満たすとき　平面BEP上で点Rが描く図形の面積を求めよ。

解法の糸口

①　$\overrightarrow{OR}$ とその図示

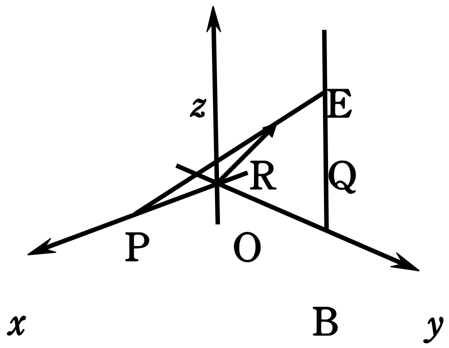
$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{BQ} - \overrightarrow{BP}$

$= \overrightarrow{BQ} - (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB})$

$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OP} + t\,\overrightarrow{PQ}$

$\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{BQ}$ を成分表示して

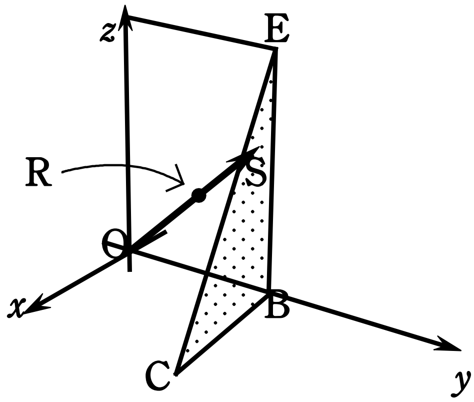
$\overrightarrow{OS}$ を s, t を用いて成分表示



②　$\overrightarrow{OS}$ とその図示

Sは OR上にあるから $\overrightarrow{OS} = r\,\overrightarrow{OR}$　$(r > 1)$

Sは平面BCE上, すなわち平面 $y = 1$ 上にあることに着目。 r を消去して $\overrightarrow{OS}$ を s, t を用いて成分表示



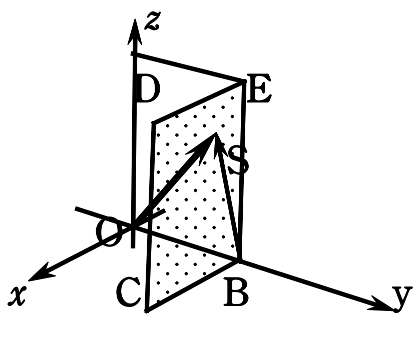
③　$\overrightarrow{BS} = p\overrightarrow{BC} + q\overrightarrow{BE}$　ただし $0 \leqq p \leqq 1$　$0 \leqq q \leqq 1$

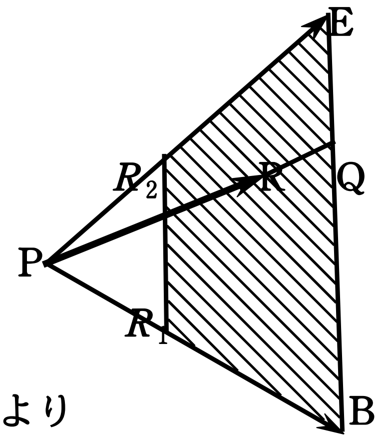
$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OB} + p(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) + q(\overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OB})$

$\overrightarrow{OS}$ を p, q を用いて　成分表示

一方 s, t を用いて $\overrightarrow{OS}$ を成分表示②

2通りの $\overrightarrow{OS}$で成分比較 $0 \leqq p \leqq 1$　$0 \leqq q \leqq 1$ より s, t の条件を求める





④　（３）における点Rが描く図形

Rは平面BEP上にあって　$\overrightarrow{PR}=t\,\overrightarrow{PQ}$

ただし $\frac{3}{7}\leqq t\leqq 1$

$0\leqq s\leqq 2$ のとき　Qは線分BE上を動く

$t=1$ のとき　Rは線分BE上を動く

$t=\frac{3}{7}$ のとき　$\overrightarrow{PR_1}=\frac{3}{7}\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PR_2}=\frac{3}{7}\overrightarrow{PE}$ より

RはBEに平行に R_1からR_2 まで動く

⑤　三角形PBEの面積　$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{PB}|^2|\overrightarrow{PE}|^2-(\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PE})^2}$

⑥　面積比は相似比の2乗比に着目　Rが描く図形の面積 $S-\left(\frac{3}{7}\right)^2S$

解答

詳細な解答はメルカリ購入から参照してください

感想

新課程　数学Ｃ　空間ベクトル題。題意の理解　題意の図示　Ｓが
平面ｙ＝１上にある　Ｑは線分BE上にある　題意を的確に捕らえ
させて　適切な計算力　実に見事な素晴らしい出題　感謝!

6　t を実数とする。

x の2次方程式 $x^2-(2t^2-3)x+t^4-7t^2+6t=0$ ....（＊）がある。

（１）$x=0$ が(＊)の解となる t の値をすべて求めよ。

（２）a, b, c, d を実数とする。すべての実数 t について $x=t^2+at+b$ および $x=t^2+ct+d$ が(＊)の解となる a, b, c, d の値を求めよ。
ただし　$b>d$ とする。

（３）(2)の a, b, c, d に対し　$\alpha(t)=t^2+at+b$, $\beta(t)=t^2+ct+d$ とする。
関数 $f(t)$ を以下の式で決める。

$$f(t)=\begin{cases}|\alpha(t)| & (|\alpha(t)| \geqq |\beta(t)| \text{ のとき}) \\ |\beta(t)| & (|\alpha(t)| < |\beta(t)| \text{ のとき}|) \end{cases}$$

t が実数全体を動くとき　$f(t)$ の最小値を求めよ。

解法の糸口

①　2　参照　　②　2　参照

感想

2　（１）（２）同じ問題。本題（３）絶対値記号を用いないで　関数 $f(t)$ を設定して $f(t)$ の最小値を求める問題。
誤り問題では $\alpha(x)$，$\beta(x)$を与えて $|\alpha(x)|=|\beta(x)|$ の最小値を求める問題となっています。