$\boxed{7}$　$f(x)=x+\sqrt{2x-x^2}$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ とする。原点をOとする座標平面上の曲線C： $y=f(x)$ と直線 l : $y=x$ を考える。

（１）関数 $f(x)$ の増減を調べ　$f(x)$ の最大値および最小値を求めよ。

（２）曲線C上の点P $(x,\ f(x))$ $(0<x<2)$ から直線 l に下した垂線をPHとする。線分PHの長さを r, 線分OHの長さを t とするとき　r および t をそれぞれ x を用いて表せ。

（３）直線 l と直線 $y=-x+3$ との交点をA, 曲線Cと直線 $y=-x+3$ との交点をBとする。曲線Cと2つの線分OAとABで囲まれた部分を　直線 l の周りに1回転させてできる立体の体積を求めよ。

解法の糸口

①　関数　$f(x)=x+\sqrt{2x-x^2}$

定義域　$2x-x^2 \geqq 0$ より　$0 \leqq x \leqq 2$

微分　$f'(x)=1+\dfrac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}}=\dfrac{\sqrt{2x-x^2}+(1-x)}{\sqrt{2x-x^2}}$

②　$f'(x)=0$

$\sqrt{2x-x^2}=x-1$

ここで　$y=\sqrt{2x-x^2}$　　$y=x-1$ とおく

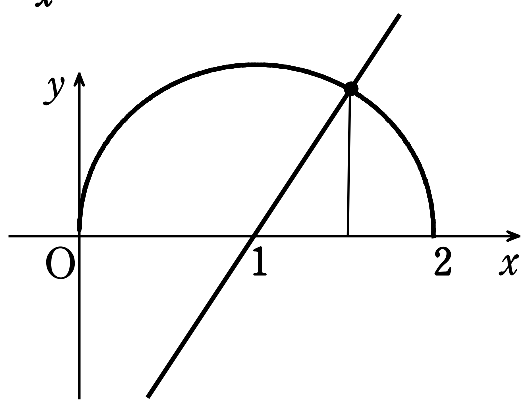
$y=\sqrt{2x-x^2} \Leftrightarrow y^2=2x-x^2$, $y \geqq 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=1,\ y \geqq 0$

半円と直線の交点の x 座標

$2x-x^2=(x-1)^2$ より $2x^2-4x+1=0$

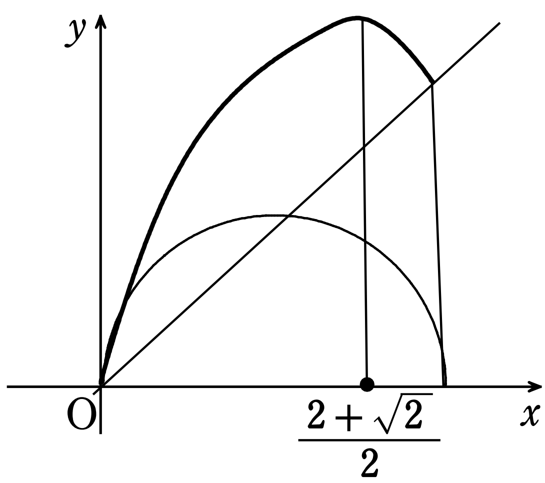
右図より　$x=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$



③　曲線C: $y=x+\sqrt{2x-x^2}$ の概形

合成　$y=x$　　$y=\sqrt{2x-x^2}$

曲線Cの概形　右図



④　距離公式

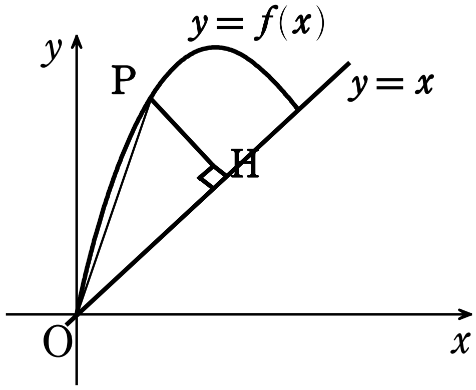
点 $(x_0,\ y_0)$ から直線 $ax+by+c=0$ までの距離　$d=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

⑤　点 $P(x,\ f(x))$ から直線　$x-y=0$に下した垂線をPHとおく。

長さ　$PH=r=\dfrac{|x-f(x)|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{f(x)-x}{\sqrt{2}}$

長さ　$OH=t$　△POHが直角三角形より

t を x で表す



⑥　交点AとBの座標

$\begin{cases} y=x \\ y=-x+3 \end{cases}$　の解　$x=y=\dfrac{3}{2}$　よって　$A\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$

$\begin{cases} y=-x+3 \\ y=x+\sqrt{2x-x^2} \end{cases}$　の解　y を消去　$\sqrt{2x-x^2}=3-2x$

$\sqrt{2x-x^2}=3-2x \Leftrightarrow 2x-x^2=(3-2x)^2,\ 3-2x\geqq 0$

$5x^2-14x+9=0$　より　$(5x-9)(x-1)=0$　$0\leqq x\leqq\dfrac{3}{2}$ より $x=1$

このとき $y=2$　よって $B(1,\ 2)$　⇐　スゴイ！

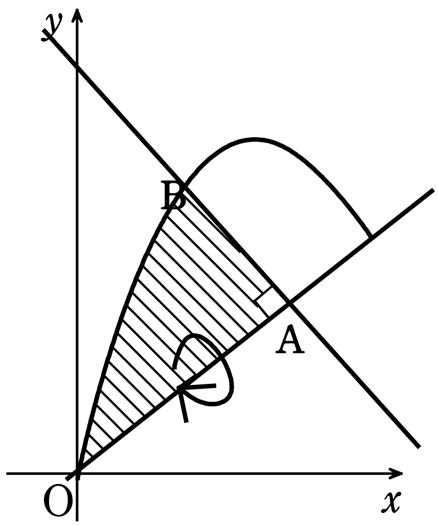
⑦　題意の図示

曲線Cと 線分OA, ABで囲まれた部分を　直線 l ; $y=x$ の周りに1回転させてできる立体

右図　斜線部分を回転

⑧　立体の体積　$V=\pi\displaystyle\int_0^{\alpha} r^2 dt$

ただし　$\alpha=OA$



⑨　Vの定積分計算

t を x で表す。$dt=\dfrac{dt}{dx}dx$ に着目　受験生　捨て問かな

解答

詳細な解答はメルカリから購入して参照してください

感想

数研教科書　数学Ⅲ　第6章　積分法の応用　一般の回転体の体積
誤り問題　6　ここで　教科書問題を取り上げておきました。
数研教科書で学習した受験生。本題を見て　ビックリ仰天　やった！
それにしても　出題者　曲線C: $y=x+\sqrt{2x-x^2}$　直線　$y=-x+3$
と設定。実に見事にすばらしい入試問題として出来上がっていますね。
感謝！　感動！