$\boxed{3}$ $f(x)=e^{-x}\sin x$，$g(x)=e^{-x}\cos x$ とする。座標平面上の2つの曲線 C_1：$y=|f(x)|$，C_2：$y=|g(x)|$ を考える。$|f(x)|=|g(x)|$ を満たす正の実数 xの値を小さい順に $a_1, a_2, a_3\cdots$とする。

（１） $f'(x)+g'(x)$ および $f'(x)-g'(x)$ を求めよ。

（２） $a=1, 2, 3, \cdots$ に対し　a_n を求めよ。

（３） $a=1, 2, 3, \cdots$ に対し　$a_n \leqq x \leqq a_{n+1}$ の範囲において2つの曲線 C_1，C_2 で囲まれた部分の面積を S_n とする。

S_1 および $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} S_k$ の値を求めよ。

解法の糸口

① $f'(x)=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x=-e^{-x}(\sin x-\cos x)$

$g'(x)=-e^{-x}\cos x-e^{-x}\sin x=-e^{-x}(\cos x+\sin x)$

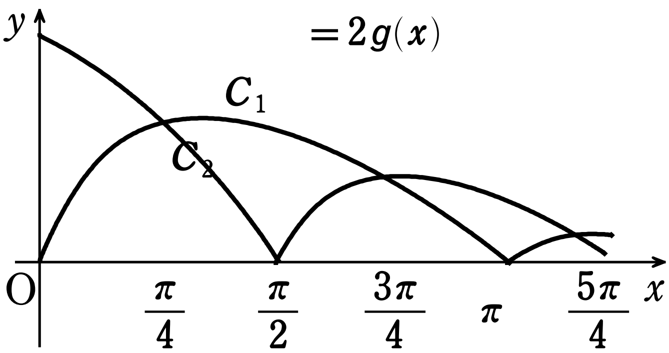
$f'(x)+g'(x)=-2e^{-x}\sin x$
$=-2f(x)$

$f'(x)-g'(x)=2e^{-x}\cos x$
$=2g(x)$

② $f(x)+g(x)=-g'(x)$

$f(x)-g(x)=-f'(x)$

③ C_1, C_2 の概形　右図



$e^{-x}>0$ より $|\sin x|=|\cos x|$

を満たす正の実数解　$a_1=\frac{\pi}{4}$，$a_2=\frac{3\pi}{4}$，$a_3=\frac{5\pi}{4}$，$\cdots$

④ C_1 と C_2 で　はじめて囲まれた図形の面積

$$S_1=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\{f(x)-g(x)\}dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}\{f(x)+g(x)\}dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\{-f'(x)\}dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}\{-g'(x)\}dx=-\Big[f(x)\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}-\Big[g(x)\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}$$

⑤ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} S_k$ の値

糸口つかめない。 S_2 でも求めてみるか 受験生 捨て問 ....

$\boxed{\text{解答}}$

詳細な解答はメルカリから購入した徳島大学の数学を参照してください

$\boxed{\text{感想}}$

（３）は難問。 S_1 の求め方 （１）の結果 $f'(x)+g'(x)=-2f(x)$

$f'(x)-g'(x)=2g(x)$ より $f(x)+g(x)=-g'(x)$, $f(x)-g(x)=-f'(x)$

であることを用いて 面積の定積分計算に活用。ここはポイント。

さらに最終題 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} S_k$ が無限等比級数である このことを発見

しかしながら 受験生 最終題 解くための気力が残っているかな...

それにしても高レベルの数学